

Matematisk modellering af væskestrømningen i elastisk forbundne kar med periodisk sammenpresning

Timmermann, Stine

Published in:

Institut for Studiet af Matematik og Fysik samt deres Funktioner i Undervisning Forskning og Anvendelse. Tekster

Publication date:

2005

Document Version

Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):

Timmermann, S. (2005). Matematisk modellering af væskestrømningen i elastisk forbundne kar med periodisk sammenpresning. *Institut for Studiet af Matematik og Fysik samt deres Funktioner i Undervisning Forskning og Anvendelse. Tekster*, 443, 0-126.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact rucforsk@kb.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Resumé

I denne specialerapport opstilles og analyseres en matematisk model for et fysisk system bestående af to væskefyldte kar forbundet med en elastisk slange. Slangen sammenpresses periodisk på et afgrænset asymmetrisk placeret stykke, hvilket resulterer i en højdeforskel mellem væsken i de to tilstødende kar. Ved at ændre frekvensen er det muligt at ændre størrelsen og fortegnet af højdeforskellen. Modellen er opstillet med det formål at undersøge hvilke mekanismer, der er ansvarlige for dette strømningsfænomen.

Modellen udgøres af et system af to partielle differentialligninger samt begyndelses- og randbetingelser. Ligningssystemet er opstillet på baggrund af en én-dimensional teori baseret på en midling af Navier-Stokes ligningerne, mens randbetingelserne bygger på den stationære Bernoulliligning.

Ligningerne i modellen løses numerisk ved brug af finite difference metoder og de numeriske resultater sammenholdes med analytiske resultater for svingningen af en væske i et urør. I fremskrivningen af de indre punkter i stedsdomænet sammenlignes to andenordens algoritmer, MacCormack-algoritmen og Richtmyers to-trins Lax-Wendroff-algoritme, mens karakteristikmetoden benyttes til at fremskrive randværdierne. Derudover sammenlignes løsningerne opnået med MacCormack-algoritmen i de tilfælde, hvor ligningssystemet er på henholdsvis konservativ og ikke-konservativ form. De numeriske undersøgelser viser en mindre forskel mellem resultaterne fra MacCormack- og Lax-Wendroff-algoritmen, mens der ses tegn på, at løsningen af ligningssystemet på ikke-konservativ form konvergerer langsommere end løsningen af ligningssystemet på konservativ form.

Undersøgelsen af de kvalitative karakteristika ved strømningsfænomenet tager udgangspunkt i middelhøjdeforskellens frekvensafhængighed, som viser, at der forekommer to typer af punkter, hvor middelhøjdeforskellen skifter fortegn. Den ene type har karakter af resonanspunkter, hvor middelhøjdeforskellen divergerer, og frekvensen af disse punkter afhænger af systemspecifikke parametre såsom længden af den elastiske slange samt af de parametre, der bestemmer bølgehastigheden. Ved den anden type punkter ændres værdien af middelhøjdeforskellen kontinuert fra at være eksempelvis negativ til positiv og middelhøjdeforskellen er derfor nul i disse punkter. Forekomsten og frekvensværdien af punkterne afhænger især af placeringen af sammenpresningen. Det har ikke været muligt at give en forklaring på de kvantitative karakteristika ved middelhøjdeforskellens frekvensafhængighed.

Abstract

In this master's thesis a mathematical model describing a physical system consisting of two fluid filled open tanks connected by an elastic tube is formulated and analysed. The tube is periodically compressed at a place of asymmetry, which results in a difference between the fluid levels of the two tanks. Alternation of the frequency changes the size and sign of the level difference. The model is formulated to investigate which mechanisms can be held responsible for the flow phenomenon.

The model consists of two partial differential equations together with initial and boundary conditions. The system of equations is formulated using a one dimensional theory derived by averaging the Navier-Stokes equations, while the boundary conditions are derived using the unsteady Bernoulli equation.

The equations constituting the model are solved numerically with finite difference methods and the results are compared with analytical results for the oscillation of fluid in a U-tube. For the prediction of the interior values in the space domain two second order numerical schemes, the MacCormack scheme and Richtmyers two-step Lax-Wendroff scheme, are used independently and the results are compared, while the method of characteristics is used for the prediction of the boundary values. Additionally, numerical solutions based on the MacCormack scheme are compared for the situations where the system of equations is formulated in conservation and non-conservation form, respectively. The numerical investigations show a little difference between the results using the MacCormack and the Lax-Wendroff scheme, while the numerical solution of the equations in non-conservation form has a tendency to converge slower than the solution of the equations in conservation form.

The investigation of the qualitative characteristics of the flow phenomenon is based on the frequency dependence of the mean level difference, which shows two types of points where the mean level difference changes sign. The first kind resembles resonance points, where the mean level difference diverges and the position of these points depend upon system specific parameters like the length of the tube and of the parameters determining the wave velocity. At the second kind the mean level difference changes continuously from for instance negative to positive values and the mean level difference is therefore zero at those points. The occurrence and position depend especially upon the location of the compression of the tube. It has not been possible to give a quantitative explanation of the frequency dependence of the mean level difference.

Forord

Denne tekst er en lettere revideret udgave af min specialerapport i matematik. Arbejdet som ligger bag rapporten er udført på IMFUFA, Roskilde Universitetscenter under vejledning af Johnny T. Ottesen i 2003/2004.

Jeg skylder personalet på IMFUFA's værksted, og især Ebbe Hyldahl Larsen, en stor tak for konstruktionen af kar-systemet – selvom det desværre ikke nåede at blive helt færdig.

Tak til Jesper Larsen for gode råd i den periode af projektet, hvor intet syntes at fungere som det skulle.

Sidst men ikke mindst vil jeg gerne takke Johnny T. Ottesen, fordi han introducerede mig til området og fænomenet, for en super god vejledning undervejs i projektet, for mange og lange vejledermøder om de skønne facetter ved matematisk modellering og fordi han altid tog sig tid til at tale med mig og kommentere mit arbejde.

Stine Timmermann

Juni 2005

Forside: Illustration af kar-systemet.

Bagside: Illustration af ring-systemet.

Indhold

1	Indledning	1
1.1	Tidligere undersøgelser	1
1.1.1	Undersøgelser og resultater for kar-systemet	3
1.1.2	Undersøgelser og resultater for ring-systemet	6
1.2	Formål og metode	8
1.2.1	Valg af system	8
1.2.2	Valg af numerisk metode	8
1.3	Rapportens opbygning	9
1.4	Notation og referencer	10
2	Væskestrømning i elastiske slanger	13
2.1	Elasticitet	13
2.2	Viskositet og laminar strømning	15
2.3	Bevarelseslove	16
2.3.1	Kontinuitetsligningen	17
2.3.2	Impulsligningen	18
2.4	Fysisk fortolkning af Reynolds tal	19
2.5	Stationær væskestrømning i stive rør	19
2.6	Pulserende strømning	20
2.7	Tyngdekraftens betydning i kar-systemet	21
2.8	En-dimensional strømningsmodel	25
2.8.1	Omskrivning til bølgeligningen	29
2.9	Konservative former	30
3	Opstilling af model for kar-systemet	35
3.1	Model for væskestrømning i slangen	35
3.2	Den konstitutive ligning	35
3.3	Bølgehastigheden	38
3.4	Pumpefunktionen	39
3.5	Begyndelsesbetingelserne	40
3.6	Randbetingelserne	40
3.7	Dimensionsløs form	44
3.8	Linearisering af ligningssystemet og randbetingelserne	45
3.9	Den primære model – en oversigt	47
4	Numeriske metoder	49
4.1	Princippet i finite difference metoder	49
4.2	MacCormack-algoritmen	50
4.3	Lax-Wendroff-algoritmen	52
4.4	Stabilitetsbetingelse	52

4.5	Karakteristikmetoden	53
4.6	Fremskrivningen af ligningerne	55
4.6.1	Fremskrivningen i de indre punkter	56
4.6.2	Fremskrivning i randpunkterne	56
5	Numeriske resultater	61
5.1	Den tyngdekraftsdrevne svingning	63
5.2	Aktivering af pumpen	66
5.2.1	Viskositet	70
5.2.2	Densitet	71
5.2.3	Stabilitetsundersøgelse	71
5.2.4	Frekvensafhængigheden	73
5.2.5	Positionsafhængigheden	74
5.2.6	Sammenhængen mellem frekvens- og positionsafhængigheden . . .	76
5.2.7	Det transmural tryk i slangen	78
5.2.8	Længden af slangen	78
5.2.9	Bølgehastigheden	81
5.2.10	Resultater ved anvendelse af Lax-Wendroff-algoritmen	83
5.2.11	Ikke-konservativ form	84
5.2.12	Approximationen i opstillingen af den én-dimensionelle teori . . .	86
5.2.13	Lineært ligningssystem og lineære randbetingelser	87
5.2.14	Beskrivelser af pumpen	88
5.2.15	Modellens begrænsninger	90
5.3	Opsamling	91
6	Sammenligning med resultater fra litteraturen	95
6.1	Sammenligning med andre modeller	95
6.2	Sammenligning af resultater	97
6.3	Ækvivalensen mellem kar- og ring-systemet	100
6.4	Den numeriske metode	100
7	Konklusion	103
	Litteratur	105
	Bilag	107
A	Symbolliste	109
B	Γ-modellen	111
C	MatLab-programmet	113

1 Indledning

To gummislanger med forskellig elasticitet er forbundet, så de danner en lukket ring, der er fyldt med en væske. På et for systemet asymmetrisk sted sammenpresses den mest elastiske slange med en fast frekvens på et afgrænset stykke af slangen, hvilket resulterer i en bevægelse af væsken rundt i ringen. Ændres frekvensen, ændrer væsken hastighed og kan ved bestemte frekvenser helt skifte retning, så væsken løber den modsatte vej.

En gummislange forbinder to kar, der er fyldt med en væske. Gummislangen sammenpresses med en fast frekvens på et afgrænset stykke, der ikke ligger midt imellem karrene. En højdeforskel indstiller sig mellem væsken i de to kar, således at væskehøjden i eksempelvis det højre kar er større end væskehøjden i det venstre kar. Ændres frekvensen, ændres størrelsen af den opnåede højdeforskel og ved bestemte frekvenser kan højdeforskellen skifte fortegn, således at væsken står højere i det venstre kar.

Fænomenerne, som her beskrives, betragtes som ækvivalente og kaldes på engelsk for *valveless pumping* (eng. valve = ventil), fordi væske pumpes rundt i et system uden at ventiler sørger for, at væsken ikke løber tilbage til ligevægtsspositionen. I [Borzi & Propst, 2003] er fænomenet døbt ‘Liebau-fænomenet’ efter lægen Gerhart Liebau, der i 1954 foreslog, at blodcirkulationen i mennesker ikke blot skal tilskrives hjertet, men at respirationen, hvor der dannes et periodisk overtryk på et for det kardiovaskulære system asymmetrisk sted, også kunne formodes at have en del af æren [Liebau, 1954a][Liebau, 1954b]. Liebau forsøgte i sin tid at appellere til forskere indenfor fluid dynamik for en nærmere undersøgelse og beskrivelse af fænomenet og appellen blev hørt. I begyndelsen af 1960’erne og helt frem til i dag er der med jævne mellemrum lavet undersøgelser, hvor man gennem forskellige matematiske modeller for ring- og kar-systemet eller varianter heraf, forsøger at afdække fænomenet.

Dette speciale består i en numerisk undersøgelse af fænomenet med det formål at forklare de karakteristiske træk ved ‘Liebau fænomenet’. Inden jeg beskriver, hvordan dette er grebet an, vil jeg kort præsentere de undersøgelser og resultater, der siden 1960’erne er publiceret om ‘Liebau-fænomenet’. Det følgende er ment som en oversigt over allerede opnåede resultater, og en introduktion til de grundlæggende begreber i modelleringen af fænomenet, således at læseren er i stand til at sætte sig ind i formålet med arbejdet præsenteret i denne rapport og i hvilken kontekst det skal forstås. De begreber, der omtales i det følgende, vil (næste uden undtagelse) alle blive forklaret undervejs i rapporten.

1.1 Tidligere undersøgelser

De fleste hidtidige undersøgelser af ‘Liebau-fænomenet’ bygger på en én-dimensionel¹ version af de ikke-lineære Navier-Stokes-ligninger, der er en samlet betegnelse for beva-

¹Hermed menes, at der udover tidsvariablen kun er én stedsvariabel.

relsesligningerne for en væske [Mahrenholtz, 1963a][Rath, 1976][Ottesen, 2003][Borzi & Propst, 2003]. Ligningerne suppleres med rand- og begyndelsesbetingelser, konstitutive ligninger, der angiver sammenhængen mellem trykket i slangen og slangens tværsnitsareal, og endelig en modellering af selve sammenpresningen af slangen, det vil sige en beskrivelse af pumpen. De opstillede ligninger lader sig generelt ikke løse analytisk, og man er derfor nødt til at inddrage numeriske metoder for at undersøge modellen. Typisk benyttes *finite difference* metoder, som er simple algoritmer, der – fordi ligningerne som regel er i én dimension – gør det muligt for den enkelte forsker selv at varetage programmeringen.

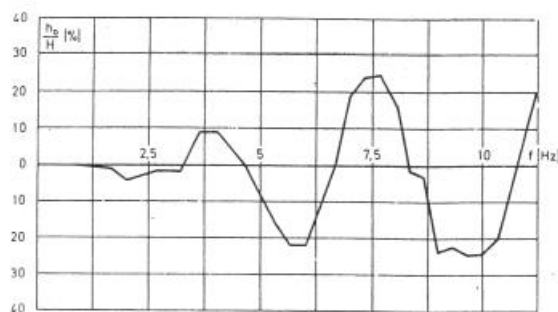
For at forstå, hvilke mekanismer der grundlæggende genererer væskestrømningen, har man haft den tilgang, at modellerne skal være så simple som muligt, hvilket også er en af årsagerne til, at stort set alle (i [Jung & Peskin, 2001] arbejdes der med en to-dimensionel beskrivelse, idet formålet her er at undersøge en på forhånd udarbejdet numerisk metode og ring-systemet bruges som eksempel) vælger én-dimensionelle modeller og at nogle forsøger at opstille lineære modeller eller at linearisere de ikke-lineære Navier-Stokes-ligninger [von Bredow, 1968][Takagi & Takahashi, 1983a][Takagi & Takahashi, 1983b][Moser et al., 1998][Borzi & Propst, 2003]. Der er dog en vedvarende diskussion om det faktisk er muligt at opnå en væskestrømning i ring-systemet og en højdeforskel mellem væsken i karrene i kar-systemet med en lineær model. I flere af de refererede arbejder nævnes det, at det ikke er muligt at beskrive strømningen ved en lineær model [Mahrenholtz, 1963a][Mahrenholtz, 1963b][Mahrenholtz, 1974][Rath & Teipel, 1978][Ottesen, 2003], fordi systemet altid vil svinge omkring ligevægtspositionen², mens andre – mere eller mindre direkte – hævder, at lineære modeller faktisk kan indfange fænomenet [von Bredow, 1968][Moser et al., 1998][Borzi & Propst, 2003].

Det eneste forsøg på en fænomenologisk forklaring på fænomenet, jeg har set, tager udgangspunkt i ring-systemet [Thomann, 1978]: Når slangen presses sammen forskydes to lige store mængder væske til hver side, men på grund af at slangen ikke sammenpreses på et for ringen symmetrisk sted og der derfor er et kortere stykke elastisk slange på eksempelvis den venstre side af sammenpresningen i forhold til den højre side, vil trykket blive større til venstre for sammenpresningen. Væsken i den mindre elastiske slange accelereres derfor over mod det lange elastiske stykke, det vil sige venstre om i ringen. Opretholdes sammenpresningen, således at slangen fortsat er lukket, vil væsken svinge frem og tilbage i ringen med en karakteristisk svingningsperiode. Hvis sammenpresningen ophører, når væsken i den stive del af slangen har nået maksimal hastighed, vil den samlede væske have en hastighed til venstre i ringen, hvorimod væsken vil have en hastighed til højre, hvis slangen først åbnes en halv periode senere, hvor væsken er blevet reflekteret ved sammenpresningen og på vej højre om i ringen. Væskens retning bliver således et spørgsmål om længden af sammenpresningen, hvilket ikke nødvendigvis er knyttet sammen med pumpefrekvensen. Om denne beskrivelse kan genfindes i de udførte numeriske undersøgelser af ring-modellen redegøres der ikke for i det refererede arbejde, og sammenligninger med eksperimentelle data præsenteres ikke. Derudover er en overførsel af denne forklaring til kar-systemet ikke umiddelbar oplagt.

²For ring-systemet er 'ligevægtspositionen', når hastigheden er nul og i kar-systemet er det, når væsken står lige højt i begge kar.

1.1.1 Undersøgelser og resultater for kar-systemet

I en afhandling af von Bredow [1968] opstilles en lineær model for kar-systemet. Systemet opfattes som bestående af to slanger, der hver har to randbetingelser; en randbetingelse der beskriver det tilstødende kar og en anden randbetingelse, som beskriver pumpen, det vil sige en beskrivelse af hvor meget væske, pumpen presser ud i den pågældende del af slangen. Løsningen af de lineære partielle differentialligninger sammenlignes med eksperimentelle resultater udarbejdet af von Bredow [1968], hvor han har undersøgt, hvilken betydning forskellige systemspecifikke parametre har for den opnåede højdeforskel mellem væsken i karrene. På figur 1.1 ses de eksperimentelle data for højdeforskellen som funktion af frekvensen. I frekvensscannet, der dækker ca. $1 - 11 \text{ Hz}$ er der fem skift i fortegnet for højdeforskellen. I intervallerne $0 - 3,25 \text{ Hz}$, $4,5 - 6,5 \text{ Hz}$ og $8,25 - 10,75 \text{ Hz}$ står væsken højest i venstre kar, mens væsken står højest i højre kar i intervallerne $3,25 - 4,5 \text{ Hz}$, $6,5 - 8,25 \text{ Hz}$ og efter $10,75 \text{ Hz}$.

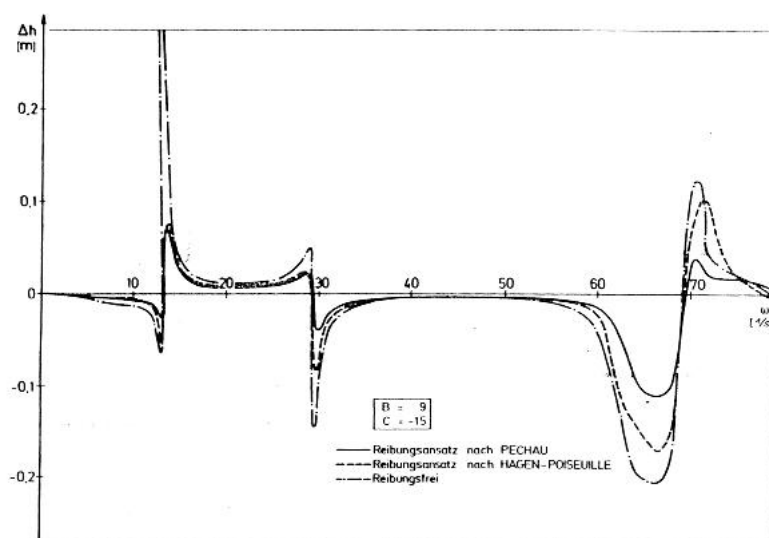


Figur 1.1 Eksperimentelle data produceret af von Bredow [1968], der viser sammenhængen mellem højdeforskellen i de to kar – hvor positive værdier betyder, at væsken står højest i højre kar – og pumpefrekvensen. På abscisseaksen er frekvensen angivet, mens den relative højdeforskel er angivet på ordinataksen. Pumpen er placeret med centrum i $0,33 l_0$, hvor $l_0 = 1,8 \text{ m}$ er længden af slangen, og det sammenpressede stykke af slangen er $0,133 \text{ m}$. Frekvensintervallerne mellem de enkelte målinger er ikke opgivet i artiklen, men ud fra knækkene på grafen ser det ud til, at der er et interval på ca. $0,5 \text{ Hz}$ mellem målingerne. Grafen er hentet fra [Rath, 1976], da opløsningen var bedre.

Der observeres en kvalitativ overensstemmelse mellem de eksperimentelle data og de numeriske resultater med hensyn til sammenhængen mellem højdeforskellen og frekvensen, idet der også i de numeriske data forekommer relativt lange frekvensintervaller, hvor højdeforskellen ikke skifter fortegn. Derudover viser de numeriske data også, at længden af slangen har indflydelse på højdeforskellens frekvensafhængighed. Men udover konklusionen, at fænomenet lader sig beskrive ved en lineær model, gives der ingen nærmere forklaring på de observationer, der er gjort.

Rath [1976] tager teten op efter von Bredow [1968] og opstiller en model ud fra de ikke-lineære Navier-Stokes-ligninger [Rath, 1976][Rath & Teipel, 1978]. Ligningssystemet løses numerisk og simuleringresultaterne sammenlignes med de eksperimentelle data

præsenteret i [von Bredow, 1968]. Udover at undersøge fænomenets afhængighed af de forskellige parametre i systemet, det være sig slagkraften eller amplituden af pumpen, længden af slangen, viskositeten af væsken samt pumpefrekvensen, foretages der også en sammenligning af tre forskellige numeriske metoder; karakteristikmetoden, og to forskellige numeriske algoritmer: Lax-Wendroff-algoritmen³ og MacCormack-algoritmen; alle tre metoder er *finite difference* metoder. Undersøgelsen konkluderer, at karakteristikmetoden er meget omstændelig, mens MacCormack-algoritmen er betydelig bedre end Lax-Wendroff-algoritmen med hensyn til konvergens og regnetid; ikke en overraskende konklusion, idet MacCormack-algoritmen er en andenordens algoritme, hvorimod et-trins Lax-Wendroff-algoritmen er førsteordens. Undersøgelsen af højdeforskellens frekvensafhængighed i det tilfælde, hvor væsken er vand, viser, at der for vinkelfrekvenser mellem $0 - 80 \text{ s}^{-1}$ (svarende til frekvensintervallet $0 - 12,7 \text{ Hz}$), forekommer tre skift i fortegnet for højdeforskellen og at skiftene er forbundet med meget store forskelle mellem væskehøjderne i karrene; frekvensscannet er vist i figur 1.2.



Figur 1.2 Numeriske data, der viser sammenhængen mellem højdeforskellen i de to kar – hvor positive værdier betyder, at væsken står højst i højre kar – og pumpefrekvensen angivet i vinkelfrekvenser. Pumpen er placeret med centrum i $0,3 l_0$, hvor $l_0 = 1,8 \text{ m}$ er længden af slangen og det sammenpressede område af slangen er $0,2 l_0$. I to af kurverne er viskositeten forskellig fra nul, mens viskositeten er nul i den kurve med det største udsving. Ud fra grafen er det ikke klart om højdeforskellen divergerer omkring 14 s^{-1} . [Rath, 1976]

Der konkluderes intet generelt om fænomenet på baggrund af de undersøgelser, der foretages, så konklusionen på afhandlingen er, at frekvensen har stor betydning for væskestrømningen i slangen, viskositeten har ingen indflydelse, der ses en mindre afhængighed af pumpens amplitude og ændres længden af slangen bevares den kvalitative sam-

³Lax-Wendroff-algoritmen kan enten være i ét eller to trin. Sidstnævnte omtales også som Richtmyers to-trins Lax-Wendroff-algoritme. I [Rath, 1976] bruges et-trins algoritmen.

menhæng mellem højdeforskellen og frekvensen, men der sker en tilsyneladende lineær skalering af placeringen af fortegnsskiftene, således at skiftet omkring 14 s^{-1} forskydes halvt så meget som det næste skift omkring 30 s^{-1} forskydes ved en ændring af slanges længde. Sammenligninger med de eksperimentelle data fra [von Bredow, 1968] foretages på baggrund af grafen vist i figur 1.1, og der konkluderes, at der er en god overensstemmelse mellem de numeriske og eksperimentelle resultater. Denne udtalelse baseres på, at de frekvenser, hvor højdeforskellen skifter fortegn omtrent er ens for de to første skift. Sammenlignes figur 1.1 og 1.2 imidlertid, synes der at være store kvalitative forskelle, idet de næsten diskontinuerte skift i fortegnet for højdeforskellen i de numeriske resultater på ingen måde genfindes i de eksperimentelle data.

Takagi & Takahashi [1983a] opstiller en ikke-lineær førsteordens differentialligning og udfører eksperimenter for en variant af kar-systemet, oprindeligt præsenteret i [Mahrenholtz, 1963a] og [Mahrenholtz, 1963b], nemlig hvor to lukkede kar er forbundet med stive rør hvorpå der, forskudt for midten, er indsat et T -rør med et stempel i 'benet' af T 'et, der pumper væske ud og ind i det tværgående rør. Denne undersøgelse viser, at det ikke er elasticiteten af slangen, der er eneansvarlig for, at væsken i karrene indstiller sig i forskellig højde, men derimod en asymmetri i systemet. Modellen og eksperimentet dækker frekvensintervallet $0,2 - 1,6\text{ Hz}$, og i dette interval er middelhøjdeforskellen positiv og monoton stigende og der observeres eller omtales ikke tilfælde, hvor højdeforskellen skifter fortegn. I [Takagi & Takahashi, 1983b] undersøges middelhøjdeforskellens opførsel som funktion af pumpefrekvensen i nærheden af den naturlige svingningsfrekvens for systemet, der for de anvendte parametre ligger ved $1,37\text{ Hz}$ (i [Takagi & Takahashi, 1983a] anvendes andre parametre, hvorved resonansfrekvensen ikke ligger i det undersøgte interval). I forbindelse med resonanspunktet observeres der et skift i fortegnet for middelhøjdeforskellen.

Modellen udarbejdet af Rath [1976] får en renæssance i [Borzi & Propst, 2003]. Der er dog foretaget visse ændringer, idet trykket og væskehastigheden bruges som variable og randbetingelserne er simplificerede. Derudover bruges en anden mere kompliceret (moderne) løsningsalgoritme (i forhold til Lax-Wendroff- og MacCormack-algoritmerne), en andenordens MUSCL-Hancock-algoritme, som Borzi & Propst [2003] skriver kan bruges på ligningssystemer, der ikke er på konservativ form. Borzi & Propst [2003] undersøger modellen ved vinkelfrekvenserne $\omega = 14,6\text{ s}^{-1}$ og $\omega = 29,2\text{ s}^{-1}$ og de finder at højdeforskellen mellem væsken i karrene er henholdsvis positiv og negativ ved de to frekvenser, men der foretages ikke et frekvensscan. Ligningssystemet og randbetingelserne lineariseres og resultaterne fra den ikke-lineære og den lineære model sammenlignes med det formål at vise, at fænomenet *ikke* er et ikke-lineært fænomen. I resultaterne for den lineære model uden viskositet ses meget store oscillationer i højdeforskellen og på de resultater de gengiver i artikler, ser der i dette tilfælde ikke ud til at være en middelhøjdeforskel, hvilket de også ender med at konkludere. Ved at benytte en viskositet på $50 \cdot \mu_{vand}$ for den lineære model viser de grafisk, at resultatet for den lineære model synes at nærme sig niveauet for den ikke-lineære model.

Borzi & Propst [2003] observerer derudover, at placeringen af pumpen har en ikke-triviel⁴ betydning for væskehøjderne i karrene, det vil sige for væskestrømmingens størrelse og retning. Ved at fastholde frekvensen, således at den tilsvarende bølgelængde er lig slanges længde, mens pumpens placering varieres, ses et meget periodisk billede. Der er ikke

⁴Med triviel menes tilfældet, hvis højdeforskellen mellem karrene er nul, når pumpen er i midten og monotont stigende, når pumpen flyttes mod et af karrene.

forsøgt med frekvenser, hvor bølgelængden ikke svarer til et helt multiplum af slangens længde og observationerne følges ikke op med bud på mulige forklaringer.

1.1.2 Undersøgelser og resultater for ring-systemet

I [Moser et al., 1998] undersøges (en alternativ udgave af) ring-systemet med det formål ‘*to identify the responsible mechanism and the conditions under which this mechanism operates*’. Systemet består af to buede stive rør, med hver deres tværsnitsareal, der er forbundet gennem to elastiske reservoir, hvorved der dannes en ring. Det ene reservoir sammenpresses periodisk i tiden. Et system af lineære ordinære differentialligninger opstilles for dette system – svarende til et elektrisk analogt system, hvor flowet⁵ er analogt til strømmen, trykket til spændingen, de to reservoir er kapacitanser og rørene er karakteriseret ved impedanser – og det vises, at der forekommer et flow i systemet og at flowets fortegn er frekvensafhængigt; det betragtede frekvensområde er dog meget begrænset ($\sim 0,2 - 2,4 \text{ Hz}$). Betingelserne for at der forekommer et flow i ringen hævdes at være, at impedansen for hvert rør er forskellige og at mindst et af rørene har en kompleks impedans, men det vises ikke, og konklusionen på artiklen er, at der kan forekomme et ensrettet flow i et system uden ventiler.

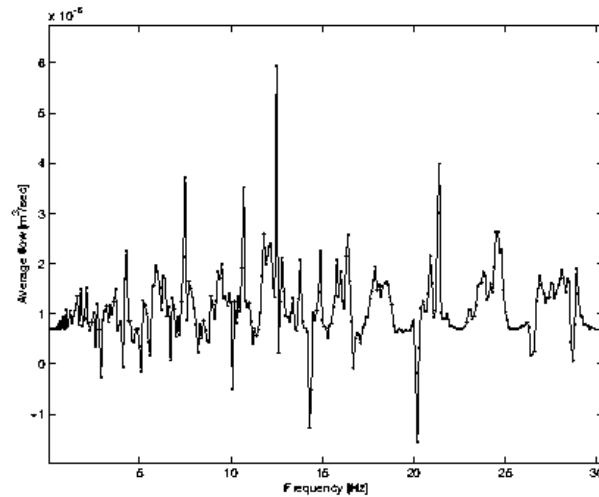
Ring-systemet, i den udformning der er beskrevet i starten af indledningen, modelleres i [Ottesen, 2003] ud fra de én-dimensionaliserede, ikke-lineære Navier-Stokes-ligninger, der udgør et system af to partielle differentialligninger med tværsnitsarealet og væskestrømningshastigheden som variable. Pumpen modelleres ved, at hviletværsnitsarealet antages at variere periodisk i tiden på et afgrænset stykke af den mest elastiske slange. Dette medfører, at beskrivelsen af pumpen ikke ligger i det inhomogene led i ligningssystemet, hvilket er tilfældet for de beskrivelser, hvor pumpen beskrives ved en ændring i det ydre tryk.

Modellen undersøges numerisk ved Richtmyers to-trins Lax-Wendroff-algoritme og det undersøges og rapporteres specielt, hvordan størrelsen og retningen af flowet i slangen afhænger af pumpefrekvensen, se figur 1.3. Denne sammenhæng underbygges af eksperimentelle resultater fra ring-systemet. Ved at linearisere ligningssystemet i modellen udledes en lineær sammenhæng mellem antallet af de frekvenser, hvor flowet skifter fortegn, og frekvensen, som stemmer overens med de numeriske resultater.

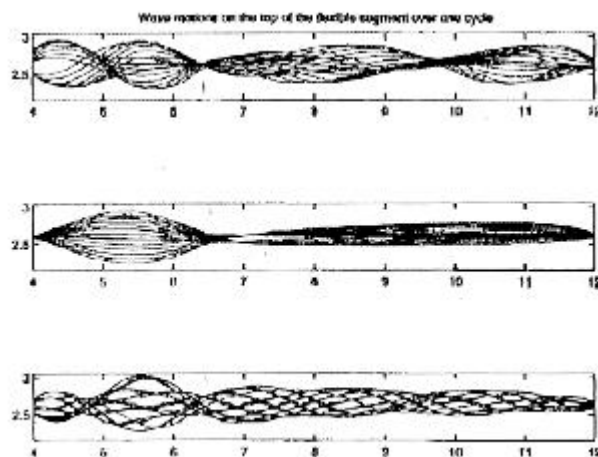
Resultaterne præsenteret af Ottesen [2003] underbygger undersøgelser lavet af Jung & Peskin [2001], hvor en variant af ring-systemet modelleres i to dimensioner ved brug af ‘*immersed boundary*’ metoden⁶. Ring-systemet har en ‘ellipsoid’ form, hvor den ene lige langside er elastisk, mens resten af ringen har stive rande. Den elastiske del er placeret således, at når flowet er i urets retning, vil væsken løbe fra højre mod venstre i det elastiske stykke. Udover en undersøgelse af flowets frekvensafhængighed rapporteres der også om en undersøgelse af bølgeudbredelsen i den elastiske del af slangen ved tre forskellige frekvenser, udvalgt så de henholdsvis resulterer i a) flow i urets retning, b) intet flow og c) flow i retningen modsat urets, se figur 1.4. I tilfælde a) observeres stående bølger med flere knuder i slangestykket og med knude i højre side af stykket men ikke i venstre side. Også i tilfælde b) opstår der stående bølger i slangestykket, men nu kun med én knude

⁵Flowet er defineret som produktet mellem slangens tværsnitsareal og væskestrømningshastigheden.

⁶En metode, udviklet af C. S. Peskin, der specielt er velegnet til to-dimensionelle væskedynamikproblemer, hvori der optræder bevægelige rande.



Figur 1.3 Numeriske data, der viser sammenhængen mellem det midlede flow i slangen og pumpefrekvensen. Pumpefrekvensen i Hz er på abscisseaksen og middelflowet angivet i $10^{-6} m^3/s$ er på ordinataksen. [Ottesen, 2003]



Figur 1.4 Trykbølger i ring-systemet i den elastiske del af ringen. Fra oven a) flow i urets retning, b) intet flow og c) flow i retningen modsat urets. Pumpen sammenpresser slangen mellem 4 og 6; den første $1/4$ af slangen fra venstre. [Jung & Peskin, 2001]

i løbet af det elastiske stykke og knuder i begge ender af stykket. I tilfælde c) synes der at være vandrede bølger, der bevæger sig mod højre, det vil sige mod urets retning og det nævnes, at sådanne bølger kan sammenlignes med peristaltiske bevægelser, der kunne tænkes at transportere væske mod højre. Sammenhængen mellem bølgemønstrene og flowet i de to andre tilfælde kan forfatterne, efter eget udsagn, ikke forklare.

Jung & Peskin [2001] undersøger afslutningsvis, hvilken betydning inertien i systemet har. Man kunne være bekymret for, at når væskestrømningen først var etableret i én retning, så sørgede inertien for at fastholde retningen, men ved at ændre frekvensen undervejs i en kørsel, observeres det, at væskestrømmen også skifter retning.

1.2 Formål og metode

Stort set alle undersøgelser, der forsøger at afdække fænomenet både i kar- og ring-systemet, begrænser sig til at påvise, at der faktisk kan forekomme et flow i et system uden ventiler og giver ingen forklaring på hvilke mekanismer, der genererer fænomenet. Formålet med dette speciale er at opstille en model, således at det er muligt at undersøge strømningsfænomenet og forsøge at afdække de mekanismer, der genererer strømningen.

1.2.1 Valg af system

Jeg har valgt at studere 'Liebau-fænomenet' som det kommer til udtryk i kar-systemet fremfor i ring-systemet, fordi kar-systemet appellerer mere til min fysiske intuition. Flowets størrelse og retning er i kar-systemet direkte repræsenteret ved størrelsen og fortegnet på højdeforskellen mellem væsken i de to kar, hvorimod flowet i ring-systemet skal beregnes ved at integrere op over længden af ringen, og det er derfor svært at vide præcist, hvad der foregår i slangen. Skal fænomenet studeres i den 'fysiske' virkelighed er det også betydeligt nemmere at aflæse en højdeforskel mellem karrene end at bestemme et middelflow i slangen. Derudover er der i kar-systemet kun én elastisk slange mod de to slanger i ring-systemet, og man kan derfor forestille sig, at en analyse af eventuelle bølgefænomener i systemet vil være simplere i kar-systemet.

I kar-systemet har tyngdekraften en stor indflydelse på fænomenet, og det er muligt at give en matematisk beskrivelse af tyngdekraftens påvirkning isoleret set. I ring-systemet har tyngdekraften derimod ingen betydning, men i stedet spiller inertien af væsken her en rolle. Det er imidlertid ikke trivielt, hvordan man skal beskrive, hvilken betydning inertien har for fænomenet.

Udfordringen ved kar-systemet er randbetingelserne. I ring-systemet benyttes periodiske randbetingelser, mens beskrivelsen af karrene i kar-systemet er indlejret i randbetingelserne. Dette resulterer i, at modellen udover et system af ikke-lineære partielle differentiaalligninger for væskestrømningen i slangen også består af to koblede ikke-lineære differentiaalligninger for hver rand.

1.2.2 Valg af numerisk metode

Jeg har i dette projekt valgt primært at benytte MacCormack-algoritmen til at foretage de numeriske undersøgelser af den matematiske model. Derudover er Richtmyers to-trins

Lax-Wendroff-algoritme benyttet til nogle af undersøgelserne, således at der kan foretages en sammenligning af resultaterne fra de to algoritmer.

Jeg startede projektet med at forsøge at reproducere resultaterne fra [Rath, 1976], det vil sige jeg opstillede den samme model og benyttede MacCormack-algoritmen til at løse ligningerne i modellen. Dette var ikke muligt, og for at finde ud af om fejlen eventuelt kunne ligge i numerikken, skiftede jeg MacCormack-algoritmen ud med Richtmyers Lax-Wendroff-algoritme, hvilket dog ikke løste problemerne.

Efter at have opstillet min egen model for kar-systemet og skulle vælge en numerisk metode til at undersøge modellen med var det meget nærliggende at vælge de algoritmer, jeg i forvejen havde kendskab til. At MacCormack-algoritmen blev den primære algoritme var således delvist en tilfældighed.

Årsagen til at valget er faldet på finite difference metoder frem for finite element metoder, skyldes udover ovennævnte grunde et ønske om selv at kunne skrive programmet, dels for at opnå de programmeringsmæssige kompetencer, der ligger i dette, men også dels i et håb om, at det giver større frihed til at udføre forskellige delundersøgelser af modellen. Jeg har valgt at benytte MatLab til programmeringen, fordi der på IMFUFA er en tradition for at anvende dette program.

1.3 Rapportens opbygning

Væskestrømning i elastiske slanger

I den første del af afsnittet introduceres de fysiske begreber i det virkelighedsområde, som den matematiske model beskriver. Det drejer sig især om, hvordan man skal beskrive elasticiteten af slangen og de egenskaber og karakteristika en strømmende væske har.

Herefter opstilles en bevægelsesligning for en viskøs væske (ude af ligevægt) i et urør med det formål at beskrive, hvilken betydning tyngdekraften har i kar-systemet. Og afslutningsvis udledes en én-dimensionel model for væskestrømningen i en elastisk slange på baggrund af en midling af Navier-Stokes-ligninger for ikke-turbulent væskestrømning.

Opstilling af model for kar-systemet

Opstillingen af modellen for kar-systemet består i den én-dimensionelle model for væskestrømning fra forrige afsnit, sammen med en konstitutiv ligning, der beskriver sammenhængen mellem trykket i slangen og slangens tværsnitsareal, begyndelsesbetingelser og randbetingelser for slangen, som også indeholder en beskrivelse af karrene. Afsnittet afsluttes med en linearisering af ligningerne i modellen for kar-systemet.

Numeriske metoder til løsning af modellen

Den opstillede model kan ikke løses analytisk, og man er derfor nødt til at tage numeriske metoder i brug. I dette afsnit præsenteres Lax-Wendroff- og MacCormack-algoritmerne, som bruges til at beregne fremskrivningen af de indre punkter, og karakteristikmetoden, der sammen med randbetingelserne giver fremskrivningen af randpunkterne. Herefter opstilles de ligninger, der bruges i MatLab-programmet.

Numeriske resultater

Her præsenteres de numeriske resultater. Resultaterne sammenholdes blandt andet med de analytiske beskrivelser af væskesvingningen i urøret og diskuteres ud fra de intuitive

forventninger, der er til kar-systemet. I dette afsnit foretages der ingen sammenligning med andre resultater fra litteraturen.

Sammenligning med resultater fra litteraturen

Her følger en diskussion af mine resultater i forhold til resultaterne fra andre lignende undersøgelser af kar-systemet og ækvivalensen mellem ‘Liebau-fænomenet’ i ring-systemet og kar-systemet omtales.

Bilag: Symbolliste

En symbolliste over de symboler, der anvendes gennem rapporten. De symboler og indeks, der anvendes lokalt, er ikke medtaget heri.

Bilag: Γ -modellen

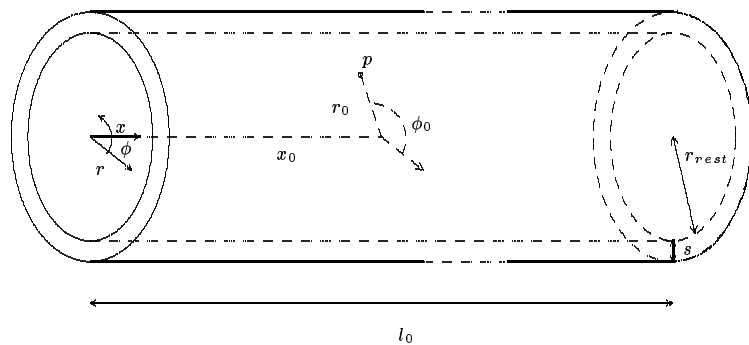
I udledningen af den én-dimensionelle teori for væskestrømningen i den elastiske slange foretages der en approksimation, der forsimpler ligningssystemet betragtelig. Betydningen af denne approksimation undersøges i resultatafsnittet og i dette bilag er ligningerne i deres ikke-approksimative form anført.

Bilag: MatLab-koder

Jeg har valgt at vedlægge de MatLab-koder jeg har benyttet til at løse de ikke-lineære ligninger med. I det vedlagte program er modellen løst med MacCormack-algoritmen. Programmet er meget simpelt opbygget, forstået på den måde, at man kan kopiere det direkte ind i en M-fil og køre programmet i MatLab uden brug af andre sideprogrammer eller funktionskald.

1.4 Notation og referencer

Slangen beskrives primært i cylinderkoordinater, hvor et punkts placering defineres ved de tre koordinater (r, ϕ, x) , hvor r angiver afstanden fra centrum, ϕ angiver vinklen til punktet og x angiver afstanden fra venstre ende af slangen til punktet, se figur 1.5.



Figur 1.5 Cylinderkoordinater i slangen, der har længden l_0 , vægtykkelsen s og hvileradius r_{rest} . Et punkt p beskrives ved koordinaterne $p = (r_0, \phi_0, x_0)$.

I ord betegnes r -, ϕ - og x -retningen henholdsvis den radiale, den tangentielle og den aksiale retning og ligeledes bruges disse betegnelser om hastigheds- og kraftskomponenter i de pågældende retninger.

I rapporten angives den partielle afledte af en variabel, eksempelvis den afledte af hastigheden u med hensyn til x , kun med symbolet $\frac{\partial u}{\partial x}$; notationen u_x , som i andre tekster ofte angiver den afledte af u med hensyn til x , angiver i denne rapport udelukkende x -komponenten eller den aksiale komponent af hastighedsvektoren \mathbf{u} .

I mange artikler og bøger, der omhandler væskedynamik, substitueres forholdet mellem den dynamiske viskositet μ og densiteten ρ med den kinematiske viskositet ν . Denne substitution har jeg undladt at foretage for ikke at drukne i forskellige indeks, bogstaver og symboler. Bogstavet ν er i denne rapport forbeholdt frekvensen, mens vinkelfrekvensen angives med ω .

Henvisning til andres arbejde foretages på to forskellige måder, idet der skelnes mellem de personer, der har lavet forskningen (eks. Rath [1976]) og den artikel eller afhandling, hvori resultaterne er publiceret (eks. [Rath, 1976]). Begge måder er flere gange benyttet i indledningen.

2 Væskestrømning i elastiske slanger

I dette afsnit gives en introduktion til de vigtigste begreber i modelleringen af strømningen af en viskøs væske i en elastisk slange. Først gives en definition på elasticitet og på, hvilke kræfter der forekommer i den elastiske slange, når den deformeres af en trykkraft. Herefter beskrives væsken og dens bevægelse i slangen, herunder hvad det vil sige, at væsken er viskøs og at den kan betragtes som en newtonsk væske.

Kar-systemet kan betragtes som et rør med en elastisk del, hvor tværsnitsarealet er ens i benene af røret men forskelligt fra tværsnitsarealet i den elastiske del. Derfor opstilles en lineær differentialligning, der beskriver svingningen af en viskøs væske i et stift rør og dernæst beskrives svingningen af en ikke-viskøs væske i et rør med variabelt tværsnitsareal.

Til sidst i afsnittet opstilles en én-dimensionel model bestående af to partielle differentialligninger, der beskriver væskestrømningen i slangen. Begrebet ‘konservative former’ introduceres og afslutningsvis undersøges det, hvorvidt det opstillede én-dimensionelle ligningssystem kan opskrives på konservativ form.

En stringent beskrivelse af strømningen af en viskøs væske i en elastisk slange kræver indførslen af andenordens tensorer til dels at beskrive elasticiteten af slangen og dels til udledningen af Navier-Stokes-ligningerne, hvor tryk- og viskøse kræfter kan samles i en tensor. I den kommende gennemgang vælger jeg imidlertid en mere fænomenologisk tilgang uden brug af tensorer i håb om, at de fysiske principper i modelleringen herved kommer til at fremstå tydeligere.

2.1 Elasticitet

Når et materiale udsættes for en kraftpåvirkning vil materialet deformeres og størrelsen af deformationen vil afhænge af kraften og af materialets egenskaber. Er materialet elastisk vil den oprindelige form genskabes, hvis kraften ophører med at virke. På figur 2.1a ses en stang med længden l_0 og tværsnitsarealet A . På enderne af stangen virker en uniform kraft, F , der vil deformere stangen, således at længden af stangen øges og tværsnitsarealet mindskes. Hvis stangens oprindelige form genskabes, når kraften ophører, og hvis der er tale om små deformationer, kan deformationen beskrives ved følgende lineære sammenhæng mellem kraften per areal og den relative deformation [Feynman, 1964]:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.1)$$

Proportionalitetskonstanten er *Youns modul*, der har dimension af tryk. Kraft per areal og den resulterende relative forskydning kaldes på engelsk for *stress* og *strain*¹. Fra den

¹I danske fysikerkredse benyttes de engelske ord, hvilket er årsagen til, at de også bruges i denne rapport.

lineære sammenhæng, som også betegnes *Hooks lov*, ses det, at en større værdi af Youngs modul kræver en større kraft for at give den samme relative forskydning, så et mindre elastisk materiale, vil derfor have en større værdi af E end et mere elastisk materiale. Forholdet mellem forlængelsen af stangen på langs og den resulterende sammentrækning af stangen på tværs, beskrives ved *Poisson's forhold*, σ , der for gummi har en værdi på $\frac{1}{2}$ [Landau & Lifshitz, 1986, s. 14].

De elastiske kræfter, der forekommer i et stykke af en gummislange, det vil sige en gummiskive, der deformeres ved at omkredsen øges som følge af et indre tryk, kan bestemmes ved Hooks lov, forudsat at radius er stor i forhold til tykkelsen af skivens væg. Har gummiskiven en radius² r_0 , længden Δx og vægtykkelsen s (se figur 2.1b), er det tangentielle stress i væggen givet ved den relative ændring af omkredsen, $\frac{\Delta O}{O_0}$, af skiven:

$$\frac{F_\phi}{s \Delta x} = E \frac{\Delta O}{O_0} = \frac{\Delta r}{r_0} E, \quad (2.2)$$

hvor $s \Delta x$ er arealet, hvorpå den tangentielle kraft virker. Tages der hensyn til, at Poisson's forhold ikke er nul, skal udtrykkes korrigeres [Landau & Lifshitz, 1986, s. 46]:

$$\frac{F_\phi}{s \Delta x} = \frac{\Delta r}{r_0} \frac{E}{1 - \sigma^2} = \frac{4}{3} \frac{\Delta r}{r_0} E. \quad (2.3)$$

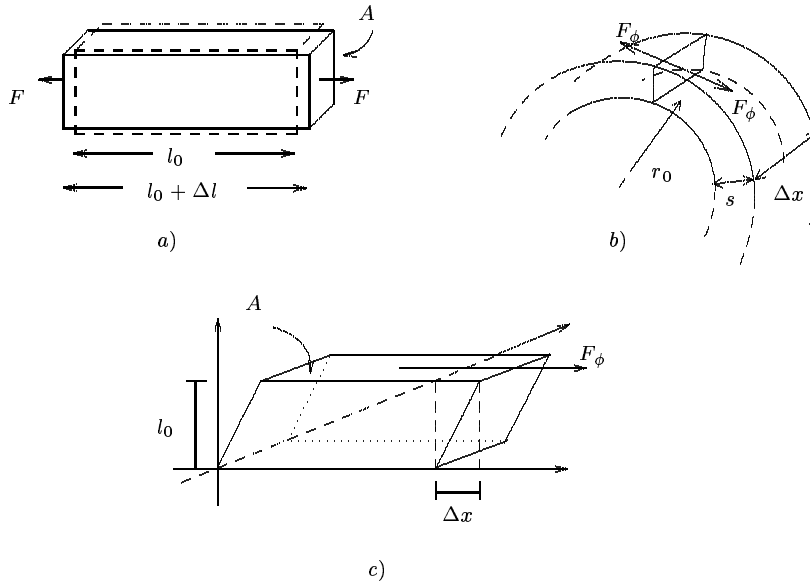
Når et materiale vrides forekommer der en anden form for deformation ofte betegnet som en shear-deformation. På figur 2.1c ses en klods som udsættes for en kraft, der virker tangentielt på overfladen af klodsens. Resultatet er en deformation af klodsens, der beskrives ved den relative forskydning af oversiden af klodsens i forhold til bunden. Det antages, at klodsens bevarer sin oprindelige højde, l_0 , således at det samlede volumen er bevaret. Som ved den foregående deformationstype, vil der for små kraftpåvirkninger eller meget elastiske materialer være en lineær sammenhæng mellem stresset og det resulterende strain [Feynman, 1964]:

$$\frac{F_\phi}{A} = G \frac{\Delta x}{l_0}. \quad (2.4)$$

Proportionalitetskonstanten G er *shearmodulet* og har også dimension af tryk og der gælder de samme overvejelser som for Youngs modul: En større værdi af shearmodulet kræver en større kraft for at give den samme relative deformation, så et mindre elastisk materiale, vil derfor have en større værdi af G end et mere elastisk materiale.

I den elastiske slange vil en ændring af trykket inde i slangen give anledning til en deformation af slangevæggen. Deformationen giver anledning til stresspåvirkninger i den aksiale, tangentielle og radiale retning, henholdsvis betegnet σ_x , σ_ϕ og σ_r . Hvis tykkelsen af slangens væg er lille i forhold til diameteren, vil det radiale stress være lille i forhold til stresset i de to andre retninger. Hvis det aksiale stress også ignoreres og der således kun tages højde for det tangentielle stress, svarer det til at betragte deformationen af slangen som deformationer af uafhængige elastiske 'ringe' eller skiver. Derved kan kræfterne i slangen udelukkende beskrives ved Youngs modul, således som det er gjort ovenfor for en gummiskive. Problemet ved at benytte denne ringmodel til at beskrive slangens elasticitet er, at kontinuiteten af slangen aksialt set ikke er garanteret, idet beskrivelsen ikke tager højde for, at diameteren af to naboringe fysisk set ikke kan variere uafhængigt af

²Radius antages her at være afstanden fra centrum og til midt i skivens væg, hvilket er årsagen til, at det er nødvendigt at antage, at radius skal være stor i forhold til vægtykkelsen.



Figur 2.1 a) En kraft F virker på stangens endearealer A med en resulterende deformation, der forlænger stangen og mindsker tværsnitsarealet. b) Ved deformation af en gummiskive opstår der tangentielt virkende kræfter F_ϕ i væggen. c) En kraft F_ϕ virker tangentielt på klodsens horisontale overside med arealet A , hvilket resulterer i den relative forskydning $\frac{\Delta x}{l_0}$.

hinanden. Skal man tage højde for dette, er det aksiale stress i slangen nødt til at blive inddraget, hvilket vil føre til en betydelig mere kompliceret model for deformationen af slangen.

2.2 Viskositet og laminar strømning

I modsætning til et materiale, vil en væske begynde at flyde, hvis den påvirkes af en trykkraft. Forestiller man sig en væske indeholdt i et rør vil en konstant trykgradient mellem rørets ender få væsken til at flyde med en konstant hastighed, men væskepartiklerne vil ikke bevæge sig med ens hastighed, fordi gnidningen mellem røret og væsken vil bremse de partikler, som er i kontakt med røret. Effekten af denne modstand vil aftage ind mod centrum af røret og resulterer således i en hastighedsprofil af væskepartiklerne, hvor partiklerne i centrum har en højere hastighed end partiklerne ved randen. Fra empiriske observationer ved man, at hastigheden ved randen er nul, også kaldet 'no-slip'-betingelsen. Ændringen af hastigheden ind mod centrum sker kontinuert, men kan illustreres ved at antage, at væsken består af cylindriske skaller, hvori partiklerne bevæger sig med samme hastighed, se figur 2.2a.

På figur 2.2b ses et aksialt tværsnit af røret. Mellem to skaller eller plader virker der et stress, σ_x , fordi pladerne bevæger sig med forskellig hastighed, $u(r)$. Sammenhængen mellem det indre stress i væsken og hastighedsgradienten er givet ved *Newtons viskositets lov*:

$$\sigma_x = \mu \frac{du}{dr}, \quad (2.5)$$

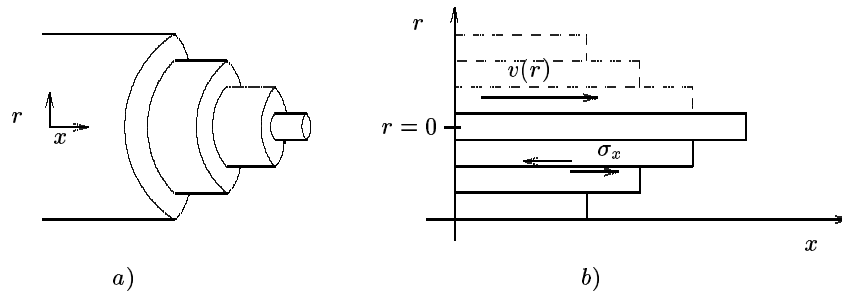


Figure 2.2 a) Illustration af hastighedsprofilen i væsken. b) Aksialt tværsnit af røret.

hvor μ er væskens viskositet [Milnor, 1982, s. 49-50]. Er viskositeten høj, er der en stor modstand i væsken mod at flyde, fordi lagene i væsken vil bremse hinanden.

Hvis der er en lineær sammenhæng mellem stresset og hastighedsgradienten, det vil sige, at μ ikke afhænger af hastighedsgradienten, kaldes væsken for en *newtonsk* væske [Tritton, 1988, s. 4]. Uden at gå nærmere i detaljer, kan man godt forstille sig, at modelleringen af ikke-newtonske væsker bliver mere kompliceret end tilfældet er for newtonske væsker, og det er da også en antagelse, som langt de fleste fluiddynamiske modeller bygger på. Vand opfører sig som en newtonsk væske, så antagelsen giver i den foreliggende modellering ikke anledning til bekymringer.

Hvis en væskestrøm kan beskrives på ovenstående måde, altså som bestående af lag, mellem hvilke væskepartiklerne ikke blandes, siges strømmingen at være *laminar* [Tritton, 1988, s. 16], hvilket kræver, at hastigheden af væskepartiklerne ikke er for stor i forhold til radius af røret og viskositeten. Er dette tilfældet vil væskepartiklerne ophøre med at følge strømmlinier, der er parallelle med røret og turbulens opstår.

Reynolds tal er et mål for, hvor turbulent en væskestrømning er, og er for væskestrømning i rør givet ved følgende sammenhæng mellem viskositeten μ , densiteten ρ , væskepartiklernes karakteristiske hastighed u_0 , og radius af røret r_0 :

$$Re = \frac{\rho u_0 r_0}{\mu}. \quad (2.6)$$

I [Granger, 1985, s. 483] er det angivet, at hvis Reynolds tal er under den kritiske værdi $Re_{kritisk} \approx 2300$ vil væskestrømningen være laminar, men det er ikke givet, at strømmingen vil være turbulent for større værdier; det afhænger af andre parametre for strømmingen, såsom belægningen af rørets indre overflade og hvordan væsken strømmer ind i røret [Fung, 1990, s. 172]. Ud fra Reynolds tal ses det eksempelvis, at jo hurtigere en væske flyder i et rør, jo højere skal viskositeten være, for at strømmingen kan vedblive at være laminar.

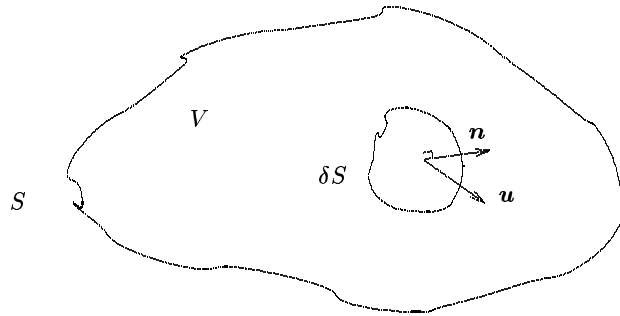
2.3 Bevarelseslove

En model for væskestrømningen i et rør eller i en slange bygger på bevarelseslove, der siger at massen, impulsen og energien er bevaret i systemet og de ligninger, der kan opstilles på baggrund af bevarelseslovene, henvises samlet til som Navier-Stokes ligninger

[Panton, 1996, s. 145]. Antages det, at man kan se bort fra omfordeling af energi i væsken, kan væskestrømningen beskrives ved masse- og impulsbevarelse.

2.3.1 Kontinuitetsligningen

Kontinuitetsligningen er den ligning, der beskriver, at massen i systemet er bevaret, hvilket kræver, at den tidslige ændring af massen i et volumen i væsken er lig netto massefluxen over volumenets overflade. På figur 2.3.1 ses en steds- og tidsfikseret lukket flade S i væsken.



Figur 2.3 Figuren viser en lukket flade S i væsken, som omgrænser volumen V . δS er et lille fladeelement, \mathbf{n} er normalvektoren til fladen og \mathbf{u} er væskens hastighed gennem δS .

Væskepartikler vil bevæge sig ind og ud gennem fladen og det handler nu om at holde regnskab med dem. På den ene side er volumenraten af væske, der forlader V gennem δS givet ved produktet mellem hastigheden af partiklen langs normalen ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$) og δS , og masseraten for hele V er således:

$$\text{masseraten af væske i } V = \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.7)$$

Ved at benytte divergensteoremet³ kan fladeintegralet omskrives til et volumenintegral over V :

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (2.8)$$

På den anden side er ophobningsraten af masse i V lig:

$$\text{ophobningsraten af masse i } V = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (2.9)$$

hvor differentiationen kan sættes under integraltegnet, fordi integrationsgrænserne, det vil sige V , ikke afhænger af tiden og fordi densiteten antagelig er en tilstrækkelig pæn (kontinuert differentiabel) funktion af tiden.

³En tilstrækkelig betingelse for divergensteorets gyldighed er, at $\rho \mathbf{u} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ er C^1 på V [Wade, 2000, s. 479]. Fluidmekanik og alle andre fysiske teorier, der beskriver den makroskopiske verden, bygger på en *kontinuumsantagelse*, der netop sikrer, at de variable størrelser kan beskrives ved 'pæne' funktioner [Panton, 1996, s. 3-4].

Massebevarelsen betyder, at der må gælde, at massen af den væske, der strømmer ud af V per tidsenhed må være lig minus ophobningsraten af masse i V :

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (2.10)$$

Da V er vilkårlig valgt og integranden kan antages at være kontinuert, må integranden være nul i ethvert punkt, hvilket giver kontinuitetsligningen:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Er densiteten af væsken konstant, hvilket indebærer, at væsken er inkompressibel, fås:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.12)$$

en betingelse, der i resten af rapporten henvises til som inkompressibilitetsbetingelsen eller inkompressibilitetsligningen.

2.3.2 Impulsligningen

Impulsbevarelsen udtrykker, at den tidlige ændring af impulsen for en partikel er lig summen af de kræfter, der virker på den [Panton, 1996, s. 91]. En væskepartikels bevægelse er således et resultat af trykkræfter, af viskøse kræfter mellem væskepartiklerne, og af ydre kræfter, såsom gravitationelle og elektromotoriske kræfter. Dette kan opskrives på en form analog til Newtons anden lov:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + F_{viskøs} + \sum F_{ydre}, \quad (2.13)$$

hvor accelerationen af væskepartiklen ved brug af kædereolen er givet ved (i kartesiske koordinater):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

idet hastigheden af partiklen udover at afhænge af tiden også er en funktion af stedskoordinaterne, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$. Det første led, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, beskriver den *lokale* acceleration, som er nul ved stationært flow. Det sidste led, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, angiver den *konvektive* acceleration, der beskriver den stedslige ændring af hastighedsfeltet; leddet er nul, hvis feltet er homogent [Granger, 1985, s. 205].

Ved en stringent udledning af impulsbevarelsesligningen er det som nævnt nødvendigt at indføre stresstensen, som beskriver det stress, der virker på en væskepartikel, det være sig både stresset fra trykkræfterne og de viskøse kræfter, der beskrives ved Newtons viskositetslov (stresset er proportionalt med gradienten af hastigheden). Ved benyttelse af inkompressibilitetsbetingelsen (2.12) kan man udlede, at viskositetsleddet i impulsbevarelsesligningen er givet ved [Acheson, 1990, 207-208]:

$$F_{viskøs} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.15)$$

hvor ∇^2 er Laplace-operatoren. Ved fraværet af ydre kræfter ser impulsbevarelsesligningen derfor således ud:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

2.4 Fysisk fortolkning af Reynolds tal

Efter at have introduceret impulsbevarelsesligningen kan Reynolds tallet gives en fysisk fortolkning. Reynolds tallet er i afsnit 2.2 angivet som forholdet mellem karakteristiske størrelser for røret og væsken (ligning (2.6)). Betegner u_0 og r_0 henholdsvis en karakteristisk hastighed og længde for et system, ses det, at det konvektive og viskøse led i impulsbevarelsesligningen (2.16) har dimensionerne:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \sim \frac{u_0^2}{r_0} \quad \text{og} \quad \left[\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \right] \sim \frac{\mu}{\rho} \frac{u_0}{r_0^2}. \quad (2.17)$$

Tages forholdet mellem de to led fås Reynolds tal:

$$\frac{[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]}{\left[\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \right]} \sim \frac{\rho u_0 r_0}{\mu} = Re. \quad (2.18)$$

Det viskøse led repræsenterer selvfølgelig de viskøse kræfter, men den konvektive acceleration skyldes ikke en egentlig kraft på systemet, men er derimod forårsaget af, at hastighedsfeltet ikke er homogent og der derved er bevægelse eller inert i systemet. Man kunne derfor tænke på det som accelerationen stammende fra en slags inertiel kraft⁴. Reynolds tal kan således betragtes som et forhold mellem de inertielle og viskøse kræfter:

$$Re \sim \frac{\text{inertielle kræfter}}{\text{viskøse kræfter}}. \quad (2.19)$$

Er Reynolds tallet stort må man forvente, at de viskøse kræfter spiller en mindre rolle, og netop fraværet af viskøse effekter kan ved høje hastigheder medføre turbulens. Et lille Reynolds tal peger på, at de viskøse kræfter er mere dominerende i væskestrømningens dynamik.

2.5 Stationær væskestrømning i stive rør

Med opstillingen af impulsligningen er det nu muligt at bestemme hastighedsprofilen for en stationær og laminar væskestrømning i et stift cylindrisk rør med længden l_0 , tværsnitsarealet A_0 og radius r_0 , hvor væskestrømningen drives af en konstant trykgradient (i både tid og sted). Da strømmingen er stationær, er $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$, og indføres cylinderkoordinater fås, at $u_\phi = 0$, $u_r = 0$ og $u_x = u_x(r)$, på grund af at trykgradienten kun har én komponent i x -retningen og at strømmingen antages at være laminar. Laplace-operatoren i cylinderkoordinater virkende på \mathbf{u} reduceres i dette tilfælde til

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right). \quad (2.20)$$

Da trykgradienten er konstant, er den lig minus trykforskellen mellem rørets ender, $-\Delta p$, divideret med længden af røret, og impulsbevarelsesligningen reduceres derved til:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{l_0} = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right). \quad (2.21)$$

⁴Denne 'kraft' kan sammenlignes med centrifugalkraften, der heller ikke er en egentlig kraft, men skyldes at systemet accelereres i en cirkelbevægelse [Tritton, 1988, s. 97]. Denne type kræfter omtales normalt som systemkræfter.

Ved dobbelt integration med hensyn til radius fås et udtryk for hastighedsfeltet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l_0} \Rightarrow \\ u_x &= -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l_0} r^2 + c_1 \ln(r) + c_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da hastigheden ikke divergerer i $r = 0$, må $c_1 = 0$ og konstanten c_2 bestemmes ud fra 'no-slip'-betingelsen, hvilket giver følgende ligning for hastigheden som funktion af radius:

$$u_x(r) = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\mu l_0} (r_0^2 - r^2). \quad (2.23)$$

Det ses af udtrykket, at den hastighedsprofil, der indstiller sig i en stationær og laminar væskestrømning, er parabelformet. En væskestrømning med dette karakteristika kaldes Hagen-Poiseuille strømning. Middelstrømningshastigheden, \bar{u}_x , fås som flowet divideret med tværsnitsarealet:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{1}{A_0} \int_0^{r_0} u_x 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2r_0^2} \frac{\Delta p}{\mu l_0} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{1}{8} \frac{\Delta p}{\mu l_0} r_0^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

og ved at sammenholde (2.23) og (2.24) kan hastigheden skrives som funktion af middel-hastigheden:

$$u_x = 2 \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \bar{u}_x \quad (2.25)$$

og trykfaldet over røret kan isoleres:

$$\frac{\Delta p}{l_0} = \frac{8\pi\mu}{A_0} \bar{u}_x. \quad (2.26)$$

I en stationær og laminar viskøs væskestrømning vil trykkraften således balancere de indre viskøse kræfter. Udtrykket (2.26) bruges, som det senere vil fremgå, til at give en approksimativ beskrivelse af de viskøse kræfter i en ikke-stationær pulserende væskestrømning i elastiske rør, hvilket er en ofte anvendt approksimation i én-dimensionelle strømningsmodeller [Zagzoule et al., 1991].

2.6 Pulserende strømning

Varierer trykket over røret med hensyn til tiden, eksempelvis beskrevet ved en harmonisk svingning, vil der stadig kunne forekomme laminar strømning, men hastighedsprofilen ændres. Hvor hastighedsprofilen for en stationær strømning er konstant positiv, fordi væskepartiklerne bevæger sig i en retning fra højt tryk til lavt tryk, vil hastighedsprofilen for den pulserende strømning både blive positiv og negativ, idet partiklerne bevæger sig både frem og tilbage i røret. Den hastighedsprofil, der forekommer i den pulserende

strømning, når gennemstrømningen er størst, vil være fladere end hastighedsprofilen for den stationære strømning [Milnor, 1982, s. 129-131]. På grund af, at strømningsprofilen skrifter form og fortegn, når den fulde parabolske profil aldrig at indstille sig, inden trykændringen tvinger profilen tilbage, hvilket resulterer i den fladere profil.

Netop den pulserende strømning kan forhindre, at der opstår turbulens i en væske, der ellers havde forudsætningerne for at være turbulent. På grund af at trykket varierer, er der ikke tid til, at strømningen kan udvikle turbulens og Reynolds tal er derfor ikke et tilstrækkeligt mål for om, der kan forekomme turbulens i en pulserende strømning [Fung, 1990]. Udover Reynolds tal indføres Wormersley tallet, α , der afhænger af frekvensen, ω , af den varierende trykgradient:

$$\alpha = r_0 \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}}, \quad (2.27)$$

hvor r_0 er radius af røret og ρ og μ er henholdsvis densiteten og viskositeten af væsken. Eksperimentelle undersøgelser af blodstrømningen i hunde (i aorta) har vist, at den kritiske værdi af Reynolds tallet bliver en funktion af Wormersley tallet, således at

$$Re \leq Re_{kritisk} = 250 \cdot \alpha, \quad (2.28)$$

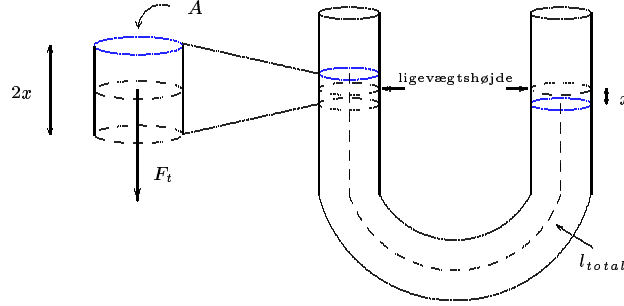
giver en tilstrækkelig betingelse for laminar strømning, når trykgradienten er pulserende [Pedley, 1980, s. 49].

2.7 Tyngdekraftens betydning i kar-systemet

Som optakt til modelleringen af kar-systemet udledes i det følgende et udtryk for den naturlige svingning eller egensvingningen i et stift urør fyldt med en viskøs væske. Den naturlige svingning skal senere bruges til at vurdere og analysere de numeriske resultater fra kar-systemet.

Så snart væsken i kar-systemet bringes ud af ligevægt på grund af pumpen, begynder tyngdekraften at spille en rolle. Er væsken ikke-viskøs, vil tyngdekraften give anledning til en udæmpet svingning bestemt ved den naturlige svingningsfrekvens for systemet. For et stift urør, fyldt med en viskøs væske, der til begyndelsestidspunktet er ude af ligevægt, er det muligt at beregne frekvensen ved at se bort fra kræfter, der skyldes krumningen af urøret. Det er forventeligt, at bevægelsesligningen for væskesøjlen svarer til ligningen for en harmonisk oscillator, men for at kunne foretage kvantitative sammenligninger med de numeriske data, er det nødvendigt at foretage en mere detaljeret udledning.

På figur 2.4 ses et urør med tværsnitsarealet A . Røret er fyldt med en væske med densiteten ρ , viskositeten μ og volumenet $V = A l_{total}$, hvor l_{total} er længden af centerlinien af væskesøjlen. Væskesøjlen er forskudt et lille stykke x , således at væsken i det venstre ben af røret står $2x$ højere end i det højre ben, og det antages, at væsken er i hvile, således at hastigheden af væsken til tiden $t = 0$ er nul. De eneste kræfter, der virker på væsken er de indre gnidningskræfter bestemt ved viskositeten, og tyngdekraften, hvis komponenter summer til nul alle steder i væsken på nær i den forskudte del. Da den forskudte del har massen $2x A \rho$, vil tyngdekraften på væskesøjlen være $F_t = -2x A \rho g$, hvor g er tyngdeaccelerationen.



Figur 2.4 Urør med tværsnitsareal A , hvor væskesøjlen er forskudt x i forhold til ligevægstilstanden.

Et approksimativt udtryk for de viskøse kræfter i urøret kan opstilles ved at gøre brug af ligning (2.26). Ligning (2.26) beskriver, at der i en stationær strømmende væske vil indstille sig en ligevægt mellem den resulterende trykkraft og de viskøse kræfter. Da tryk er lig kraft per areal, vil den resulterende trykkraft på væsken i røret være givet ved produktet mellem trykfaldet over røret og tværsnitsarealet, $F_{res} = \Delta p A$, og de viskøse kræfter i røret vil derfor være givet ved $F_{viskøs} = F_{res}$. Der er imidlertid ikke tale om stationær strømning i urøret, da trykgradienten afhænger af tiden, men udtrykket for de viskøse kræfter bliver, som før nævnt, alligevel ofte brugt i pulserende strømning. Ved indsættelse af trykgradienten fra ligning (2.26) i F_{res} og ved at sætte $\bar{u}_x = \frac{dx}{dt}$ fås:

$$F_{viskøs} = -8 \pi \mu l_{total} \frac{dx}{dt}. \quad (2.29)$$

Kraften på væskesøjlen, der er givet ved produktet af massen m og accelerationen a af væskesøjlen, er derfor lig summen af tyngdekraften på den forskudte del og de viskøse kræfter:

$$m a = F_t + F_{viskøs} \Rightarrow \quad (2.30)$$

$$l_{total} A \rho \frac{d^2 x}{dt^2} = -2 x A \rho g - 8 \pi \mu l_{total} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \pi \frac{\mu}{A \rho} \frac{dx}{dt} + \frac{2 g}{l_{total}} x = 0. \quad (2.32)$$

Dette er ligningen for en dæmpet harmonisk svingning og ved at benytte begyndelsesbetingelsen, at hastigheden af væsken er nul, og at $\frac{2g}{l_{total}} > \left(\frac{4\pi\mu}{A\rho}\right)^2$ (betingelse for underdæmpning [Gough et al., 1983, s. 267]), hvilket for vand er opfyldt, så længe tværsnitsarealet af røret ikke er 'for lille' og længden af væskesøjlen ikke er 'for stor'⁵, fås følgende løsning til differentialligningen:

$$x(t) = x_0 e^{-4\pi \frac{\mu}{A\rho} t} \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{l_{total}} - \left(\frac{4\pi\mu}{A\rho}\right)^2} t \right), \quad (2.33)$$

⁵Med anvendelse af værdierne for vand fås betingelsen $\frac{A^2}{l_{total}} > \left(\frac{2\pi\mu}{g\rho}\right)^2 \approx 4 \cdot 10^{-13} m^3$ (m 'et står for meter), hvilket er opfyldt for de værdier af tværsnitsarealet og rørets længde (summen af slangens længde og væskehøjderne i de to kar), der anvendes i de numeriske undersøgelser (værdierne er anført i afsnit 5).

hvor x_0 angiver forskydningshøjden over ligevægtshøjden til tiden $t = 0$. Af løsningen (2.33) ses, at amplituden af svingningen er tidsafhængig, fordi væsken er viskøs og at vinkelfrekvensen for svingningen er givet ved:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l_{total}} - \left(\frac{4\pi\mu}{A\rho}\right)^2} = \sqrt{\frac{2g}{l_{total}}} \sqrt{1 - \frac{8l_{total}}{g} \left(\frac{\pi\mu}{A\rho}\right)^2}. \quad (2.34)$$

Er viskositeten lille, svarende til viskositeten af vand, vil svingningsfrekvensen overvejende være bestemt ved forholdet mellem tyngdeaccelerationen og længden af væskesøjlen:

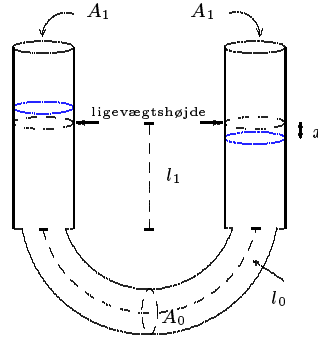
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l_{total}}{2g}}. \quad (2.35)$$

Hvis det ydre tryk over det ene ben i urøret forestilles at variere periodisk, mens det ydre tryk over det andet ben er konstant, vil bevægelsen af væskesøjlen være givet ved en superposition af egensvingningen og svingningen fra den ydre trykkraft. Beskrives det varierende ydre tryk ved $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ vil ligningen for forskydningen af væskesøjlen være givet ved summen [Gough et al., 1983, s. 52 og s. 268-269]:

$$x(t) = x_0 e^{-4\pi \frac{\mu}{A\rho} t} \cos(\omega t) + \frac{F_0}{l_{total} A \rho \sqrt{\left(\frac{2g}{l_{total}} - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega_0^2 \left(\frac{4\pi\mu}{A\rho}\right)^2}} \sin(\omega_0 t - \delta) \quad (2.36)$$

hvor første led genkendes som løsningen til den homogene del af differentiaalligningen (2.32), og andet led er den partikulære løsning, hvor δ er faseforskydningen mellem kraften og den resulterende svingning. Er viskositeten nul vil forskydningen af væskesøjlen, det vil sige amplituden af væskesøjlen svingning, divergere, hvis frekvensen for den ydre kraft er lig egenfrekvensen for urøret, $\omega_0^2 = \frac{2g}{l_{total}}$. Er viskositeten forskellig fra nul, vil der stadig forekomme resonans (en markant forøgelse af amplituden ved en bestemt frekvens), men amplituden divergerer ikke længere, fordi der er dæmpning i systemet. Af løsningen ses derudover også, at det kun er egensvingningen og dermed ikke den ydre kraft, der dæmpes af gnidningen i systemet, hvilket betyder, at opførslen af systemet med tiden vil være domineret af svingningen fra den ydre kraft. Svinger den ydre kraft omkring ligevægtsværdien for systemet, således som det er tilfældet ovenfor, vil middelværdien af svingningen være lig ligevægtsværdien.

Hvad sker der, hvis tværsnitsarealet ikke er ens i hele urøret? På figur 2.5 ses det tilfælde, hvor tværsnitsarealerne i hvert ben er ens men forskelligt fra tværsnitsarealet i bunden af urøret. Lad $A_1 = D_k^2 A_0$, hvor D_k angiver forholdet mellem diametrene i benene og i bunden af urøret (indekset k henviser til, at der er tale om en konstant og ikke en diameter); tilfældet $D_k = 1$ blev behandlet ovenfor. I det følgende antages det for nemhedens skyld, at væsken ikke er viskøs. I modsætning til før, hvor det blev brugt, at de samlede kræfter gav accelerationen af væskesøjlen, ses der nu på energibevarelsen i systemet. På grund af at væsken antages at være ikke-viskøs, er summen af den kinetiske og potentielle energi lig energien i systemet til tiden $t = 0$. I den kinetiske energi indgår hastigheden, der imidlertid er en funktion af x , fordi tværsnitsarealet varierer og energien



Figur 2.5 Urør med tværsnitsareal A_0 i bunden og A_1 i hvert ben. Væskesøjlen er forskudt x i forhold til ligevægtstilstanden, og den potentielle energi i systemet er derfor givet ved $E_{pot} = m g x = (\rho A_1 x) g x = \rho A_1 g x^2$.

skal derfor beregnes som en sum af den kinetiske energi i de tre dele af røret:

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= 2 \left(\frac{1}{2} l_1 A_1 \rho v_1^2 \right) + \frac{1}{2} l_0 A_0 \rho v_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} 2 l_1 A_1 \rho v_1^2 + \frac{1}{2} l_0 A_0 \rho \left(\frac{A_1}{A_0} v_1 \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \rho \left(2 l_1 A_1 + l_0 \frac{A_1^2}{A_0} \right) v_1^2,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

hvor massebevarelsen, $v_0 A_0 = v_1 A_1$, for en stationær strømning er benyttet i andet skridt. Den potentielle energi i væskesøjlen, når væsken er forskudt stykket x , er givet ved:

$$E_{pot} = (\rho A_1 x) g x = \rho A_1 g x^2. \tag{2.38}$$

Angiver E_0 energien i systemet til tiden $t = 0$, er den samlede energi i systemet:

$$E_0 = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \rho \left(2 l_1 A_1 + l_0 \frac{A_1^2}{A_0} \right) v_1^2 + \rho A_1 g x^2, \tag{2.39}$$

hvilket svarer til energien for en harmonisk oscillator, eksempelvis en fjeder med massen m' og fjederkonstanten k :

$$E_0 = \frac{1}{2} m' v^2 + \frac{1}{2} k x^2. \tag{2.40}$$

Ved sammenligning af energibevarelsesligningen (2.39) og energien for den harmoniske oscillator (2.40) kan vinkelfrekvensen og perioden for svingningen bestemmes ved at benytte udtrykket for vinkelfrekvensen for en harmonisk oscillator:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{2 \rho A_1 g}{\rho \left(2 l_1 A_1 + l_0 \frac{A_1^2}{A_0} \right)}} = \sqrt{\frac{2 g}{2 l_1 + l_0 \frac{D_k^2}{A_0}}} \Rightarrow \tag{2.41}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega} = 2 \pi \sqrt{\frac{2 l_1 + l_0 \frac{D_k^2}{A_0}}{2 g}}. \tag{2.42}$$

Hvis l_0 og l_1 er sammenlignelige, vil leddet $2l_1$ være negligeabelt for $D_k \gg 1$, og der vil for de værdier være en lineær sammenhæng mellem perioden og D_k :

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{2g}} D_k \quad \text{for } D_k \gg 1, \quad (2.43)$$

og det ses, at længden af det stykke af røret med det mindste tværsnitsareal bliver afgørende for længden af svingningsperioden. Tilsvarende gør sig gældende for $D_k \ll 1$, der resulterer i svingningsperioden:

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \text{for } D_k \ll 1. \quad (2.44)$$

Der er overensstemmelse med (2.35) hvis $l_{total} = 2l_1$, og igen ses det, at det kun er den del af røret med det mindste tværsnitsareal, der har betydning for svingningsperioden, i dette tilfælde summen af urørets to ben.

De ovenstående udregninger for urøret, både i situationen hvor tværsnitsarealet er konstant og hvor det varierer, skal senere bruges til at vurdere resultaterne af de numeriske undersøgelser af kar-systemet. Ved konstant tværsnitsareal ($D_k = 1$) undersøges det om svingningen af en viskøs væske i kar-systemet kan beskrives ved ligning (2.33) og ved at variere forholdet mellem tværsnitsarealet af karrene og slangen undersøges det om svingningsperioden stemmer overens med udtryk (2.42) og specielt om sammenhængen mellem perioden og D_k er lineær for $D_k \gg 1$ og er sammenlignelig med ligning (2.43).

2.8 Æn-dimensionel strømningsmodel

Beskrivelsen ovenfor er ikke tilstrækkelig til at beskrive kar-systemet, når slangen er elastisk og derfor har en bevægelig rand, der også kræver en matematisk beskrivelse. Det er derfor nødvendigt at vende blikket mod Navier-Stokes-ligningerne igen.

Væskestrømningen i slangen antages at være aksialsymmetrisk og man kan ved at omskrive impuls-ligningen til cylinderkoordinater reducere de tre impulsbevarelsesligninger til to, nemlig ligningerne for den aksiale og radiale accelerationen:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right). \quad (2.46)$$

Antallet af ligninger kan reduceres til én ligning for hastighedskomponenten i x -retningen, hvis der midles over tværsnitsarealet. I [Ottesen, 2003] foretages en stringent udledning af impulsbevarelsesligningen for den midlede aksiale hastighed. I det følgende gennemgås denne udledning for at klargøre, hvilke antagelser den én-dimensionelle model for væskestrømningen bygger på og for at nå frem til en anden formulering af kontinuitetsligningen, der i stedet for densiteten indeholder tværsnitsarealet af slangen. I [Ottesen, 2003] indføres følgende dimensionsløse variable

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad X = \frac{x}{l_0}, \quad T = \frac{u_{x0}}{l_0}, \quad U_r = \frac{u_r}{u_{r0}}, \quad U_x = \frac{u_x}{u_{x0}}, \quad P = \frac{p}{\rho u_{x0}^2} \quad (2.47)$$

i inkompressibilitetsligningen (2.12), omskrevet til cylinderkoordinater:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (2.48)$$

og i de to impulslikninger (2.45) og (2.46), med det formål at vurdere, hvilke led i ligningerne, der kan negligeres. Her er der brug for at vurdere størrelserne af de karakteristiske enheder, der er valgt i (2.47) til at definere de dimensionsløse variable. I en typisk eksperimentel opstilling for kar- eller ring-systemet vil de karakteristiske enheder være i størrelsesordenen $l_0 \approx 1 \text{ m}$, $r_0 \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $u_{x0} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ og $u_{r0} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ og man kan derved definere en lille dimensionsløs størrelse η givet ved forholdene mellem henholdsvis længderne og hastighederne:

$$\eta \equiv \frac{r_0}{l_0} = \frac{u_{r0}}{u_{x0}} = \mathcal{O}(10^{-2}). \quad (2.49)$$

Længden og radius af slangen samt den aksiale hastighed af væsken er målebare størrelser, mens den radiale hastighed u_{r0} er valgt, således at ovenstående sammenhæng gælder. Definitionen af den dimensionsløse størrelse medfører, at $\frac{r_0}{l_0} \frac{u_{x0}}{u_{r0}} = 1$, hvilket benyttes undervejs i udledningen. Foretages variabeltransformationen til de dimensionsløse variable i de to impulslikninger og i inkompressibilitetsligningen, og ignoreres de led, der indeholder η i højere potens, fås⁶ at de to impulslikninger kan approksimeres med henholdsvis:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial(RU_x)}{\partial T} + \frac{\partial(RU_r U_x)}{\partial R} + \frac{\partial(RU_x^2)}{\partial X} + \frac{\partial(RP)}{\partial X} = \frac{\mu}{\rho} \frac{l_0}{U_{x0} r_0^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_x}{\partial R} \right). \quad (2.52)$$

Approximationen medfører således, at trykket antages at være konstant over tværsnitsarealet, ligning (2.51). Inkompressibilitetsligningen kan ikke reduceres yderligere og er derfor i dimensionsløse variable givet ved:

$$\frac{\partial(RU_r)}{\partial R} + \frac{\partial(RU_x)}{\partial X} = 0. \quad (2.53)$$

Inden de reducerede likninger integreres over tværsnitsarealet er det nødvendigt først at definere den dimensionsløse aksiale middelhastighed, \overline{U}_x , og størrelsen Ψ_U , som angiver forholdet mellem middelværdien af kvadratet på hastigheden, \overline{U}_x^2 , og kvadratet på den midlede hastighed, \overline{U}_x . Den aksiale middelhastighed fås som flowet gennem slangen divideret med tværsnitsarealet og fordi den aksiale hastighed afhænger af radius, beregnes flowet ved integration over tværsnitsarealet:

$$\overline{U}_x = \frac{1}{\pi \overline{R}^2} \int_0^{\overline{R}} U_x 2\pi R dR, \quad (2.54)$$

hvor $\overline{R} = \overline{R}(X, T)$ er den dimensionsløse indre radius af slangen. Lad $\bar{r} = R_0 \overline{R}$ betegne den dimensionelle indre radius, hvorved den dimensionelle middelværdi af den aksiale hastighed er givet ved:

$$\overline{u}_x = \frac{1}{\pi \bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} u_x 2\pi r dr = \frac{1}{\pi R_0^2 \overline{R}^2} \int_0^{R_0 \overline{R}} u_{x0} U_x 2\pi (R_0 R) d(R_0 R) = u_{x0} \overline{U}_x. \quad (2.55)$$

⁶Ved at benytte følgende sammenhænge:

$$\frac{\partial(RU_r U_x)}{\partial R} = U_x \frac{\partial(RU_r)}{\partial R} + RU_r \frac{\partial U_x}{\partial R} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(RU_x^2)}{\partial X} = U_x \frac{\partial(RU_x)}{\partial X} + RU_x \frac{\partial U_x}{\partial X}. \quad (2.50)$$

Forholdet Ψ_U er givet ved:

$$\Psi_U = \frac{\overline{U_x^2}}{\overline{U_x^2}} = \frac{1}{\overline{U_x^2}} \frac{1}{\pi \overline{R}^2} \int_0^{\overline{R}} U_x^2 2\pi R dR, \quad (2.56)$$

og er kun defineret, når $u_x \neq 0$. Det ses, at $\Psi_U = \Psi_u$, hvor $\Psi_u = \frac{\overline{u_x^2}}{\overline{u_x^2}}$, og i det følgende bruges notationen $\Psi_U = \Psi_u = \Psi$. Forholdet Ψ vil altid være større eller lig én, og kun i den situation hvor u_x er konstant over tværsnitsarealet, hvilket svarer til den uvirkelige situation, hvor der ikke forekommer gnidning mellem slangens væg og væsken, vil $\Psi = 1$. Når strømmingen er pulserende, forekommer der situationer, hvor hastighedsprofilen både er positiv og negativ, det vil sige, hvor væskepartiklerne eksempelvis tæt ved randen har negativ hastighed, mens væskepartiklerne i midten har positiv hastighed, hvilket resulterer i, at $\overline{U_x^2} > \overline{U_x}^2 \Rightarrow \Psi > 1$.

Når ligningerne skal integreres får man brug for en sammenhæng mellem slangevæggenes bevægelse, og hastigheden af væsken i slangen og det er her fornuftigt at antage, at hastigheden af randen, det vil sige $\frac{d\overline{R}}{dT}$, er lig den radiale hastighedskomponent:

$$U_r|_{R=\overline{R}} = \frac{d\overline{R}}{dT} = U_x|_{R=\overline{R}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{R}}{\partial T}, \quad (2.57)$$

hvor det sidste lighedstegn følger ved brug af kædereolen, idet \overline{R} er en funktion af X og T . Dette giver en sammenhæng mellem den radiale og aksiale hastighedskomponent:

$$U_r|_{R=\overline{R}} = U_x|_{R=\overline{R}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{R}}{\partial T}. \quad (2.58)$$

Nu integreres inkompressibilitetsligningen (2.53) og impulsligningen (2.52) over tværsnitsarealet og undervejs benyttes det opstillede udtryk for hastigheden ved randen, ligning (2.58). Skridtene i integrationen af inkompressibilitetsligningen gennemgås i det følgende, mens integrationen af impulsligningen følger på samme vis og derfor ikke udledes trin for trin. Integrationen af det første led i (2.53) følger umiddelbart, mens integrationen af det andet led kompliceres af, at den øvre grænse, \overline{R} , afhænger af X , hvorved den partielle differentiation med hensyn til X ikke uden videre kan rykkes udenfor integraltegnet. Ved at benytte kædereolen kan man vise, at integrationen udover et led, hvor differentiation og integration er ombyttet også giver et led indeholdende den partielle afledte af grænsen [Jensen, 1988, s. 133]:

$$\int_0^{\overline{R}} \frac{\partial(RU_r)}{\partial R} dR + \int_0^{\overline{R}} \frac{\partial(RU_x)}{\partial X} dR = 0. \Rightarrow \quad (2.59)$$

$$\overline{R}U_r|_{R=\overline{R}} + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\overline{R}} RU_x dR - \overline{R}U_x|_{R=\overline{R}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial X} = 0. \quad (2.60)$$

Forudsætningerne for at bruge den pågældende sætning er, udover at (RU_x) skal være kontinuert differentiabel, at \overline{R} er differentiabel, således at de partielle afledte eksisterer; en betingelse, der senere får betydning for modelleringen af sammenpresningen af slangen. Substitueres $U_r|_{R=\overline{R}}$ ved brug af (2.58), vil det sidste led i (2.60) gå ud med det første led på højresiden af (2.58). Omskrives udtrykket for den aksiale middelhastighed (2.54):

$$\overline{U_x} = \frac{1}{\pi \overline{R}^2} \int_0^{\overline{R}} U_x 2\pi R dR \Rightarrow \int_0^{\overline{R}} RU_x dR = \frac{1}{2} \overline{U_x} \overline{R}^2, \quad (2.61)$$

kan integralet i det midterste led i (2.60) substitueres og med disse udregninger fås kontinuitetsligningen:

$$\bar{R} \frac{\partial \bar{R}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\bar{R}} R U_x dR = 0 \Rightarrow \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \bar{R}^2}{\partial T} + \frac{\partial (\bar{U}_x \bar{R}^2)}{\partial X} = 0, \quad (2.63)$$

der på dimensionel form kan skrives ved slangens tværsnitsareal:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (A \bar{u}_x)}{\partial x} = 0. \quad (2.64)$$

Udgangspunktet for udledningen af denne udgave af kontinuitetsligningen var inkompressibilitetsligningen i cylinderkoordinater (2.53) udledt fra kontinuitetsligningen (2.11) i tre dimensioner med antagelse om aksialsymmetri. Resultatet af udledningen er en kontinuitetsligning, der kun gælder for en inkompressibel væske og som udtaler sig om ændringen af tværsnitsarealet i stedet for densiteten.

Integrationen af det første og tredje led på venstresiden af impulsbevarelsesligningen (2.52) giver hver to led, fordi integrationsgrænsen afhænger af X og T , mens integrationen af andet og fjerde led og leddet på højresiden er ligetil. Ved at benytte (2.58) til substitution af $U_r|_{R=\bar{R}}$ samt at $\bar{u}_x^2 = \Psi \bar{u}_x^2$, fås den approksimative impulsbevarelsesligning i x -retningen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} (\bar{U}_x \bar{R}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} (\Psi \bar{R}^2 \bar{U}_x^2) + \frac{1}{2} \bar{R}^2 \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\mu}{\rho} \frac{l_0}{u_{x0} R_0^2} \bar{R} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial R} \Big|_{R=\bar{R}}. \quad (2.65)$$

Ved variabeltransformation til dimensionel form og ved indførelse af tværsnitsarealet i stedet for radius fås:

$$\frac{\partial (A \bar{u}_x)}{\partial t} + \frac{\partial (\Psi A \bar{u}_x^2)}{\partial x} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} 2 \pi \bar{r} \left[\frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_{r=\bar{r}}. \quad (2.66)$$

Betragtes det sidste led i ligningen er der på dette sted behov for at bestemme, hvordan u_x afhænger af radius på randen; det vil sige, man må komme med en antagelse om, hvilken hastighedsprofil, der indstiller sig i væsken. Dette kommer an på, om strømningen er stationær eller pulserende. [Ottesen, 2003] vælger at indføre en familie af funktioner, der ved passende parametervalg kan dække begge tilfælde:

$$u_x = \frac{\gamma + 2}{\gamma} \left(1 - \left(\frac{r}{\bar{r}} \right)^\gamma \right) \bar{u}_x, \quad (2.67)$$

hvor $\gamma = 2$ svarer til den paraboliske hastighedsprofil, ligning (2.25), med $r_0 = \bar{r}$ og større værdier af γ medfører en fladere profil svarende til pulserende strømning. Faktoren $\frac{\gamma+2}{\gamma}$ er valgt således, at der udover at være overensstemmelse med hastighedsprofilen for laminar strømning også gælder, at midlingen af u_x faktisk giver \bar{u}_x . Med sammenhængen (2.67) mellem hastigheden og den midlede hastighed er det nu muligt at beregne viskositetsbidraget i ligning (2.66) samt Ψ :

$$\frac{\mu}{\rho} 2 \pi \bar{r} \left[\frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_{r=\bar{r}} = -\frac{\mu}{\rho} 2 \pi (\gamma + 2) \bar{u}_x \quad \text{og} \quad \Psi = \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} = 1 + \frac{1}{\gamma + 1}. \quad (2.68)$$

Af udtrykket for Ψ ses, at Ψ nærmer sig én når γ går mod uendelig, det vil sige når hastighedsprofilen antages at være meget flad. Dette passer med de tidligere bemærkninger om Ψ , idet en meget flad hastighedsprofil betyder, at $\bar{U}_x^2 \approx \bar{U}_x^2$.

Til sidst benyttes identiteten⁷:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A \bar{u}_x}{\partial t} + \Psi \frac{\partial (A \bar{u}_x^2)}{\partial x} &= A \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial A}{\partial t} + \Psi \left(\bar{u}_x \frac{\partial (A \bar{u}_x)}{\partial x} + A \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \\
&= \bar{u}_x \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{\gamma + 1} \right) \frac{\partial (A \bar{u}_x)}{\partial x} \right) + A \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{\gamma + 1} \right) \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \\
&= A \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + A \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{\gamma + 1} \left(\bar{u}_x \frac{\partial (A \bar{u}_x)}{\partial x} + A \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \\
&= A \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + A \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{\gamma + 1} \left(\bar{u}_x^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2 A \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \tag{2.69}
\end{aligned}$$

til at omskrive ligning (2.66):

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \Gamma \left(\frac{\bar{u}_x^2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + 2 \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{\rho} 2 \pi (\gamma + 2) \frac{\bar{u}_x}{A}, \tag{2.70}$$

hvor $\Gamma = \frac{1}{\gamma + 1}$. Tilbage er der kun at betragte leddet med den stedsafledte af det indre tryk, $\frac{\partial p}{\partial x}$. Når det indre tryk ændres i slangen, vil tværsnitsarealet ændres og sammenhængen kan beskrives ved en *konstitutiv ligning*, der giver det transmural tryk, p_t , som funktion af tværsnitsarealet:

$$p_t(A) = p(A) - p_a, \tag{2.71}$$

hvor p_a er det ydre tryk, der afhænger af både sted og tid. I litteraturen findes mange forskellige repræsentationer af $p_t(A)$, og en bestemmelse af funktionen kræver modelleringsmæssige overvejelser, hvilket er årsagen til, at den nøjagtige beskrivelse er henlagt til modelleringsafsnittet, afsnit 3. Ved indførslen af ligning (2.71) kan den stedsafledte af det indre tryk skrives som en sum af de afledte af det transmural tryk og det ydre tryk:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_t}{dA} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x}. \tag{2.72}$$

Kontinuitetsligningen (2.64) og impulsbevarelsesligningen (2.70) kan nu skrives på kompakt matrixform, hvor notationen $\bar{u}_x = u$ er benyttet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp_t}{dA} + \Gamma \frac{u^2}{A} & (1 + 2\Gamma) u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

hvor $F(A, u) = \frac{\mu}{\rho} 2 \pi (\gamma + 2) \frac{u}{A}$. Dette er et ligningssystem af quasi-lineære hyperbolske partielle differentiaalligninger. *Quasi* dækker over, at koefficientmatricen ((2×2) -matricen på venstresiden) indeholder u og A , mens *lineær* henviser til, at koefficientmatricen ikke indeholder afledte af u eller A . At ligningssystemet er hyperbolsk betyder, at egenverdierne til koefficientmatricen er reelle.

2.8.1 Omskrivning til bølgeligningen

Et system af lineære hyperbolske førsteordens partielle differentiaalligninger med konstante koefficienter kan omskrives til bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \tag{2.74}$$

⁷Identiteten følger ved produktdifferentiation og tredje lighedstegn følger ved brug af kontinuitetsligningen (2.64).

hvor c angiver hastigheden, hvormed bølgen udbredes, c er positiv, og det inhomogene led, $f(x, t)$, angiver impulsilder og -dræn i systemet. Tilsvarende gælder for ligningssystemet (2.73), hvis ligningerne i systemet lineariseres, således at elementerne i koefficientmatricen ikke længere afhænger af u og A , dog vil der forekomme flere led i bølgeligningen, fordi koefficienterne vil afhænge af tiden. Betragtes for nemheds skyld den homogene del af ligningssystemet giver en linearisering, som består i en Taylorrækkeudvikling til første orden omkring $(A_0, u_0) = (A_{start}, 0)$, af kontinuitets- og impuls-ligningen:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A_{start} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad (2.76)$$

hvor A_{start} er lig tværsnitsarealet til tiden $t = 0$. Detaljerne i lineariseringen vil blive gennemgået i afsnit 3.8, efter udledningen af den konstitutive ligning, som giver den afledte af det transmural tryk med hensyn til tværsnitsarealet. Differentieres kontinuitetsligningen (2.75) med hensyn til stedet og impuls-ligningen (2.76) med hensyn til tiden, hvor det huskes at den afledte af p_t med hensyn til A afhænger af tiden, kan kontinuitetsligningen bruges til at eliminere $\frac{\partial A}{\partial x}$ -leddet i impuls-ligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} A_{start} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (2.77)$$

Ved at substituere $\frac{\partial A}{\partial x}$ ved hjælp af ligning (2.76) fås en andenordens partiel differential-ligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} A_{start} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.78)$$

Da p_t afhænger af tiden, optræder der i ovenstående ligning et ekstra led i forhold til den homogene del af bølgeligningen (2.74), hvilket dog ikke ændrer på, at kvadratet på bølgehastigheden er lig koefficienten foran $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$c^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial A} \Big|_{A_{start}} A_{start}. \quad (2.79)$$

Ligningssystemet, som beskriver strømningen i slangen, er imidlertid ikke lineært, hvilket betyder, at bølgehastigheden kommer til at afhænge af løsningen, det vil sige af u og A . I afsnit 3.3 bestemmes bølgehastigheden for det quasi-lineære system.

2.9 Konservative former

De numeriske metoder, der i dette projekt benyttes til at undersøge den opstillede model, er opstillet med udgangspunkt i ligningssystemer på *konservativ form* og der er i litteraturen en vedvarende diskussion om metoderne kan benyttes på ligningssystemer, der ikke er på konservativ form. For at forstå denne diskussion er det nødvendig med en introduktion til begrebet. Vendes blikket et øjeblik mod kontinuitetsligningen (2.11) siger ligningen, at den tidslige ændring af densiteten er givet ved den stedslige ændring

af densitetsfluxen i det tilfælde, hvor der i det betragtede volumen kun sker en ændring af massen, hvis massen strømmer over randen. Lad $\tau = \tau(x, t)$ være en vilkårlig tæthedsfunktion og $\mathbf{f} = \tau \mathbf{u}$ være fluxen af τ over randen for et fast volumen V og lad $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, t, \tau)$ være en funktion, der beskriver kilder og dræn i V , det vil sige som angiver raten for dannelsen eller destruktoren af τ i V . Da kan betingelsen om bevarelse af τ skrives som:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g}. \quad (2.80)$$

Det engelske ord for ‘bevarelse’ er ‘conservation’, og ovenstående ligning betegnes også som en ‘conservation law’. Dette begreb er overført til ligningssystemer, der har samme form som (2.80), nemlig ligningssystemer af typen:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(w_1, w_2)}{\partial x} = \mathbf{g}(w_1, w_2), \quad (2.81)$$

hvor w_1 og w_2 er de afhængige variable, $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2)^t$ og \mathbf{f} og \mathbf{g} er vektorer, der afhænger af de variable. Ligningssystemer af denne type kaldes ‘conservation law forms’ eller blot ‘conservation forms’, på dansk betegnet som ‘konservative former’⁸. Er ligningssystemet på ikke-konservativ form skrives det som:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(w_1, w_2) \\ g_2(w_1, w_2) \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

hvor \mathbf{A} er en 2×2 -matrix, der afhænger af \mathbf{w} . Givet at et ligningssystem kan skrives på konservativ form, da vil matricen \mathbf{A} i den ikke-konservative form være givet ved Jacobi-matricen for \mathbf{f} (ses direkte ved at udføre differentiationen af \mathbf{f} med hensyn til x i (2.81)):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2}{\partial w_2} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Der gælder desværre ikke ensbetydende, så et ligningssystem på ikke-konservativ form kan ikke altid skrives på konservativ form.

I det følgende undersøges det, hvorvidt ligningssystemet (2.73), der er på ikke-konservativ form, kan omskrives til konservativ form. I tilfældet $\Gamma = 0$ har ligningssystemet den ikke-konservative form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp_i}{dA} & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

som kan omskrives til den konservative form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} uA \\ \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{\rho} p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

⁸Konservative former bruges normalt om homogene ligningssystemer, så egentlig burde formen (2.81) betegnes som konservativ form *med kildeled* [Logan, 1994, s. 16] eller *udvidet* konservativ form [Baltzer & Schaffranek, 2003].

Men hvad med tilfældet $\Gamma \neq 0$? Hvis ligningssystemet skal kunne opskrives på konservativ form, skal der eksistere en \mathcal{C}^1 -funktion $\mathbf{f} = \mathbf{f}(A, u) = (f_1, f_2)$, således at koefficientmatricen er lig Jacobi-matricen for \mathbf{f} :

$$\begin{pmatrix} u & A \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp_t}{dA} + \Gamma \frac{u^2}{A} & (1 + 2\Gamma)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Da de afledte af \mathbf{f} er kontinuerte, er \mathbf{f} en \mathcal{C}^1 -funktion og da de blandede afledte eksisterer, vil de være lig hinanden [Wade, 2000, s. 317]:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \frac{\partial f_1}{\partial u} \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \frac{\partial f_2}{\partial u}. \quad (2.87)$$

Koefficientmatricen opfylder den første betingelse i (2.87), da $\frac{\partial u}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial A} = 1$. Men den anden betingelse er ikke opfyldt idet:

$$\frac{\partial}{\partial A} \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial A} ((1 + 2\Gamma)u) = 0, \quad (2.88)$$

mens

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp_t}{dA} + \Gamma \frac{u^2}{A} \right) = 2\Gamma \frac{u}{A} \neq 0, \quad (2.89)$$

idet $\Gamma \neq 0$. Så umiddelbart kan ligningssystemet ikke opskrives på konservativ form. Nogle ligningssystemer lader sig bringe på konservativ form, hvis der foretages en fornuftig variabeltransformation. Lad derfor (A, u) og (A', u') være henholdsvis de gamle og de nye variable og lad (θ_1, θ_2) være diffeomorfier, der angiver de nye variable som funktioner af de gamle:

$$\begin{pmatrix} A' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(A, u) \\ \theta_2(A, u) \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Da det inhomogene led i et ligningssystem ikke er afgørende for om der kan foretages en omskrivning til konservativ form betragtes kun den homogene del i det følgende. Det antages nu, at den homogene del af ligningssystemet (2.73) kan skrives ved hjælp af en (ikke konstant) koefficientmatrix \mathbf{G} , således at ligningssystemet i de nye koordinater bliver:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

hvor det antages, at funktionerne G_{ij} er \mathcal{C}^1 -funktioner. Det skal nu undersøges om \mathbf{G} er en Jacobi-matrix, således at ovenstående ligningssystem (2.91) kan omskrives til konservativ form. Da transformationen ikke er kendt, kan funktionerne G_{ij} ikke angives eksplicit; det er dog muligt at karakterisere transformationsfunktionerne nærmere ved at benytte forbindelsen til det oprindelige ligningssystem (2.73). Først udføres differentiationen af θ_1 og θ_2 med hensyn til t og derefter sammenlignes udtrykket med ligningerne i (2.73), hvilket giver ekstra bånd på θ_1 og θ_2 . Differentieres θ_1 og θ_2 med hensyn til tiden, giver kædereglene:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_1}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.93)$$

I øverste ligning i (2.73) forekommer der ikke et led med $\frac{\partial u}{\partial t}$ og ligeledes er der i den nederste ligning i (2.73) ikke et led med $\frac{\partial A}{\partial t}$. Der må derfor gælde, at $\frac{\partial \theta_1}{\partial u} = 0$ og $\frac{\partial \theta_2}{\partial A} = 0$, og funktionen θ_1 er således kun en funktion af A , mens θ_2 kun er en funktion af u , hvorfor notationen $A' = \theta_1(A)$ og $u' = \theta_2(u)$ benyttes i det følgende. Udføres differentiationen af θ_1 og θ_2 , det vil sige af A' og u' , med hensyn til både t og x fås af (2.91):

$$\frac{\partial A'}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + G_{11} \frac{\partial A'}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + G_{12} \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + G_{21} \frac{\partial A'}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + G_{22} \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.95)$$

For en koordinattransformation må der gælde, at $\frac{\partial A'}{\partial A} \neq 0$ og $\frac{\partial u'}{\partial u} \neq 0$, idet der ellers ikke ville eksistere en invers transformation, som kunne skifte tilbage fra de nye til de gamle koordinater og ligning (2.94) og (2.95) kan derved divideres igennem med de to afledte, hvorved ligningerne reduceres til:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + G_{11} \frac{\partial A}{\partial x} + G_{12} \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial A'}{\partial A}} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + G_{21} \frac{\frac{\partial A'}{\partial A}}{\frac{\partial u'}{\partial u}} \frac{\partial A}{\partial x} + G_{22} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.97)$$

Sammenlignes der igen med de to tilsvarende ligninger i den homogene del af (2.73), ses at $G_{11} = u$ og $G_{22} = (1 + 2\Gamma)u$, mens G_{12} og G_{21} er bestemt ved:

$$G_{12} \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial A'}{\partial A}} = A \quad \Rightarrow \quad G_{12} = \frac{\frac{\partial A'}{\partial A}}{\frac{\partial u'}{\partial u}} A \quad (2.98)$$

$$G_{21} \frac{\frac{\partial A'}{\partial A}}{\frac{\partial u'}{\partial u}} = \frac{1}{\rho} \frac{dp_t}{dA} + \Gamma \frac{u^2}{A} \quad \Rightarrow \quad G_{21} = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial A'}{\partial A}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp_t}{dA} + \Gamma \frac{u^2}{A} \right). \quad (2.99)$$

Den nødvendige betingelse for at \mathbf{G} er en Jacobi-matrix er, at

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial u'} = \frac{\partial G_{12}}{\partial A'} \quad \text{og} \quad \frac{\partial G_{21}}{\partial u'} = \frac{\partial G_{22}}{\partial A'}. \quad (2.100)$$

Den anden betingelse i (2.100) betragtes. G_{22} afhænger ikke af A , hvorved kædereglene giver, at

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial A'} = \frac{\partial G_{22}}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial A'} = 0 \cdot \frac{\partial A}{\partial A'} = 0. \quad (2.101)$$

G_{21} afhænger imidlertid af u , så en differentiation med hensyn til u' er forskellig fra nul. Derved er den nødvendige betingelse ikke opfyldt og matricen \mathbf{G} er således ikke en Jacobi-matrix, hvilket betyder, at det ikke er muligt at opskrive ligningssystemet (2.91) på konservativ form, når (θ_1, θ_2) er en variabeltransformation af A og u . Der eksisterer således ikke en variabeltransformation, der kan bringe ligningssystemet (2.73) på konservativ form, i tilfældet $\Gamma \neq 0$.

3 Opstilling af model for kar-systemet

I det følgende opstilles modellen, som beskriver væskestrømningen i kar-systemet. Til opstillingen af modellen er der hentet inspiration fra [Rath, 1976], [Ottesen, 2003] og [Borzi & Propst, 2003]. I diskussionen, afsnit 6, vil jeg komme nærmere ind på forskellene mellem den opstillede model og modellerne i de nævnte artikler.

En modellering af væskestrømningen i den elastiske slange omfatter først en beskrivelse af, hvordan væsken strømmer i slangen og en beskrivelse af, hvordan den elastiske slange deformeres ved en ændring af det transmural tryk, den konstitutive ligning. Herefter modelleres pumpen, som virker ved at sammenpresse et afgrænset stykke af slangen og afslutningsvis opstilles randbetingelserne for væskestrømningen i slangen, det vil sige en beskrivelse af, hvordan strømningen i slangen og ændringen af væskehøjden i karrene spiller sammen.

3.1 Model for væskestrømning i slangen

I det foregående afsnit blev de midlede Navier-Stokes-ligninger for strømningen af en viskøs væske i en elastisk slange opstillet. Under approksimationen at $\Gamma = 0$, kan kontinuitetsligningen og impulsbevarelsesligningen, der beskriver ændringen af væskestrømningshastigheden u og tværsnitsarealet A , skrives på den ikke-konservative form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp_t(A)}{dA} & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

hvor p_t er det transmural tryk, p_a er det ydre tryk og F er gnidningsmodstanden, der som nævnt i forrige afsnit kan beskrives ved udtrykket:

$$F(A, u) = 2(\gamma + 2) \pi \frac{\mu}{\rho} \frac{u}{A}. \quad (3.2)$$

Konstanten Γ og γ er forbundne gennem relationen $\Gamma = \frac{1}{\gamma+1}$, så en approksimation, hvor Γ er lille medfører, at γ er stor, hvilket svarer til en flad hastighedsprofil. I første omgang sættes $\Gamma = 0$, fordi dette muliggør, at ligningssystemet (3.1) kan omskrives til konservativ form; senere undersøges det, hvilken numerisk betydning Γ -leddene har for løsningen.

3.2 Den konstitutive ligning

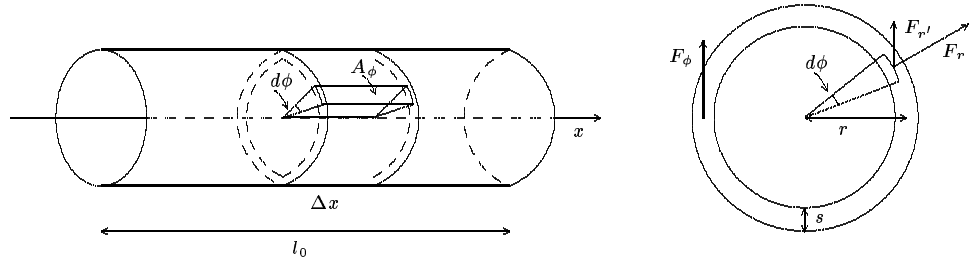
Det transmural tryk og tværsnitsarealet kobles sammen via en konstitutiv ligning. I litteraturen anvendes forskellige konstitutive ligninger i modelleringen af væskestrømning i elastiske slanger samt i beskrivelsen af blodstrømning i blodkar; der henvises til

[Olufsen, 1998] for en nærmere gennemgang af de forskellige konstitutive ligninger. Her vil jeg omtale to eksempler på konstitutive ligninger, nemlig den ligning, der benyttes i den nærværende modellering af kar-systemet, og som også benyttes i [Ottesen, 2003] og [Olufsen, 1998], samt den konstitutive ligning, der anvendes i [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003].

Udledningen af den konstitutive ligning bygger på, at deformationen i slangen kun giver anledning til et tangentielt stress i slangevæggen. I afsnit 2.1 blev de tangentielle elastiske kræfter som funktion af en ændring af radius udledt for deformationen af en gummiskive, det vil sige for et stykke af gummislangen med længden Δx :

$$\frac{F_\phi}{s \Delta x} = \frac{\Delta r}{r_{rest}} \frac{E}{1 - \sigma^2} = \frac{4}{3} \frac{r - r_{rest}}{r_{rest}} E, \quad (3.3)$$

hvor r_{rest} angiver hvileradius af slangen. På figur 3.1 ses slangen samt et tværsnit af gummiskiven.



Figur 3.1 Til venstre ses slangen og placeringen af stykket Δx og arealet A_ϕ , som den radiale kraft, F_r , virker på. Til højre ses tværsnittet af slangen med placeringen af den tangentielle kraft.

Den radiale kraft på slangevæggen F_r forårsaget af det transmural tryk p_t , er for et lille buestykke, $d\phi$, givet ved:

$$dF_r = p_t A_\phi = p_t \Delta x r d\phi, \quad (3.4)$$

hvor r er den variable afstand fra centrum ud til centerlinien i væggen. Det betyder, at vægtykkelsen, s , antages at være lille i forhold til radius. Den radiale kraft giver anledning til en kraft i lodret retning, $F_{r'}$:

$$dF_{r'} = dF_r \sin \phi, \quad (3.5)$$

hvilket ved integration over halvcirklen fra $\phi = 0$ til $\phi = \pi$ giver kraften som den øvre halvcirkel påvirker den nedre halvcirkel med. Da de to halvcirkler har to berøringspunkter deles med to og den tangentielle kraft i væggen som følge af en trykforskel bliver derfor:

$$F_\phi = \frac{1}{2} \int_0^\pi p_t r \Delta x \sin \phi d\phi = p_t r \Delta x. \quad (3.6)$$

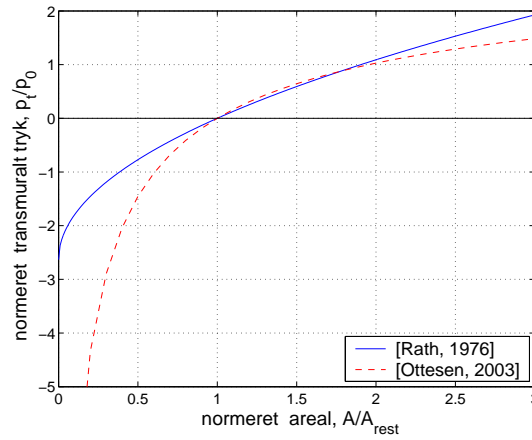
Substitueres kraften med udtryk (3.3) fås sammenhængen mellem det transmural tryk og radius og derved tværsnitsarealet af slangen:

$$\begin{aligned} p_t(r) &= \frac{4}{3} \frac{r - r_{rest}}{r} \frac{s E}{r_{rest}} \Rightarrow \\ p_t(A) &= \frac{8}{3} \frac{s E}{D_{rest}} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

hvor D_{rest} og A_{rest} er henholdsvis hvilediameter og -tværsnitsareal af slangen. I [Rath, 1976] antages det, at Poisson-forholdet er nul og at radius r i ligning (3.4) kan approksimeres med hvileradius r_{rest} . Dette giver en anden konstitutiv ligning:

$$p_t(A) = \frac{2 s E}{D_{rest}} \left(\sqrt{\frac{A}{A_{rest}}} - 1 \right). \quad (3.8)$$

Denne konstitutive ligning benytter Borzi & Propst [2003] også. På figur 3.2 ses graferne for de to konstitutive ligninger. I ligningen benyttet i [Rath, 1976], ligning (3.8), vil det transmural tryk have en endelig værdi, når tværsnitsarealet bliver nul, mens trykket i ligning (3.7) divergerer, når tværsnitsarealet bliver nul. For værdier af $\frac{A}{A_{rest}}$ mellem én og



Figur 3.2 Plot af de konstitutive ligninger, der anvendes i [Ottesen, 2003] og [Rath, 1976], henholdsvis ligning (3.7) og (3.8).

to er der rimelig overensstemmelse mellem de to ligninger, men for værdier af $\frac{A}{A_{rest}}$ under én, hvilket svarer til, at tværsnitsarealet er reduceret i forhold til hviletværsnitsarealet, øges forskellen betydeligt.

Der er flere ting ved ligning (3.8), der taler imod at anvende denne konstitutive ligning til beskrivelsen af sammenhængen mellem det indre tryk og tværsnitsarealet. I opstillingen benyttes den ubegrundede antagelse, at Poisson-forholdet er nul, og der foretages en approksimation ved bestemmelsen af det tangentielle stress. Derudover er der ikke overensstemmelse, hvis ligningen sammenlignes med eksperimentelle data. I [Fung, 1990, s. 187] præsenteres eksperimentelle data, der angiver tværsnitsarealet af en tyndvægget latex slange ved forskellige værdier af det transmural tryk. Når det transmural tryk er nul, vil tværsnitsarealet være cirkulært, men som det transmural tryk falder, fladtrykkes slangen og den cirkulære form mistes. Ved en bestemt værdi af trykket rører slangens modsatte sider hinanden, men tværsnitsarealet er i dette tilfælde ikke nul. Ved yderligere fald i det transmural tryk, bliver slangen mere og mere fladtrykt, men et tværsnitsareal på nul kræver, at det ydre tryk er meget større end det indre; et argument for, at grafen for $p_t(A)$ faktisk vil divergere for $p_t \rightarrow -\infty$, hvorved ligning (3.7) synes at give den bedste beskrivelse.

Af de ovennævnte grunde benyttes ligning (3.7) i modellen for kar-systemet. Ligningen for $p_t(A)$ fuldender ligningssystemet og differentieres $p_t(A)$ med hensyn til A fås:

$$\frac{dp_t}{dA} = \frac{4}{3} \frac{s E}{D_{rest}} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}}. \quad (3.9)$$

Ligning (3.9) bruges nu til at eliminere den afledte af det transmural tryk i impulsbevarelsligningen i ligningssystemet (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{4}{3} \frac{s E}{\rho D_{rest}} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}} & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Ligningssystemet kan forenkles en smule ved at indføre bølgehastigheden.

3.3 Bølgehastigheden

På samme måde som lyden har en udbredelseshastighed i luft, så forekommer der også en udbredelseshastighed af trykbølger i væsken i slangen. Hastigheden af trykbølgerne vil være meget større end hastigheden af de enkelte væskepartikler, på samme måde som de enkelte molekyler i luften ikke bevæger sig med en hastighed på 340 m/s , selvom lyden udbredes med denne hastighed. Når ligningssystemet (3.10) på grund af ikke-lineariteten ikke kan omskrives til bølgeligningen, hvorfra hastigheden ville kunne aflæses direkte, kan bølgehastigheden findes ved at bestemme egenværdierne til koefficientmatricen, og da ligningssystemet er quasi-lineært vil egenværdierne blive en funktion af både A og u . Egenværdierne c_{\pm} bliver:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u - c_{\pm} & A \\ \frac{4}{3} \frac{s E}{\rho D_{rest}} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}} & u - c_{\pm} \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ (u - c_{\pm})^2 - \frac{4 s E}{3 \rho D_{rest}} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}} &= 0 \Rightarrow \\ c_{\pm} &= u \pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{s E}{\rho D_{rest}}} \sqrt[4]{\frac{A_{rest}}{A}} \\ &= u \pm a, \end{aligned} \quad (3.11)$$

hvor a er bølgehastigheden i en elastisk slange med elasticiteten E , hvilediameteren og hviletværsnitsarealet D_{rest} og A_{rest} , og tværsnitsarealet A , når væsken er i hvile (det vil sige $u = 0$). For $A = A_{rest}$, det vil sige når det indre og ydre tryk er ens, fås

$$a|_{A_{rest}} = a_0 = \sqrt{\frac{4 s E}{3 \rho D_{rest}}}, \quad (3.12)$$

hvorved bølgehastigheden og tværsnitsarealet kan skrives som:

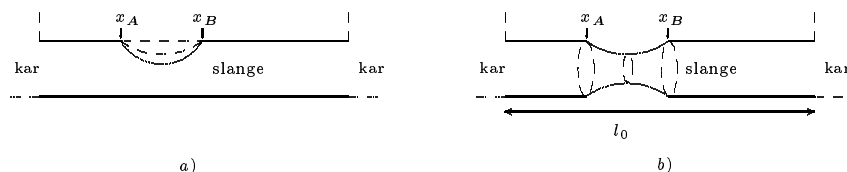
$$a = a_0 \sqrt[4]{\frac{A_{rest}}{A}} \Rightarrow A = A_{rest} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (3.13)$$

Fra afsnit 2.9 vides det, at ligningssystemet (3.10) kan opskrives på konservativ form og med indførslen af a_0 fås således:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Au \\ \frac{1}{2} u^2 + 2 a_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

3.4 Pumpefunktionen

I praksis virker pumpen ved at en finger eller en klods presser slangen sammen mellem x_A og x_B , hvilket medfører en deformation af slangen, som ikke er mulig at modellere under den aksialsymmetriske antagelse, se figur 3.3a. Den situation, der er mulig at modellere, vil svare til at slangen sammenklemmes aksialsymmetrisk, således at tværsnitsarealet forbliver cirkulært, se figur 3.3b.



Figur 3.3 a) Slangen sammenpresses aksialt asymmetrisk mellem x_A og x_B . b) Slangen sammenpresses symmetrisk mellem x_A og x_B .

Den stedslige ændring af slangens radius kan beskrives ved en parabel i x , mens den tidslige ændring af radius kan beskrives ved en sinusfunktion eller rettere sagt den positive del af en sinusfunktion. Medtages den negative del af sinusfunktionen svarer det til, at slangen udvides ved en udefrakommende kraft (i modsætning til hvis væsken i slangen udvidede slangen, hvilket der naturligvis ikke ses bort fra). Disse overvejelser kan overføres til det ydre tryk; når slangen presses sammen og radius mindskes på et stykke af slangen svarer det til, at det ydre tryk stiger i det pågældende område.

Funktionen, der beskriver den stedslige ændring af radius, skal mindst være differentiabel. Denne betingelse har to begrundelser; den ene er, at slangevæggen fysisk set vil være glat, selv hvis man brugte en rektangulær klods til at trykke den sammen med, og det betyder at den funktion, der beskriver ændringen af radius med hensyn til x , derfor skal være differentiabel. Den anden begrundelse er, at det i opstillingen af den én-dimensionelle approksimation af Navier-Stokes-ligningerne i afsnit 2.8 blev antaget, at \bar{R} var differentiabel med hensyn til X (antagelsen blev brugt i ligning (2.60)).

Lad $0 < x_A < x_B < l_0$, $x \in [0, l_0]$ og $m \in \mathbb{N}$. Funktionen f_m defineret ved

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_A)^m (x_B-x)^m}{(\frac{1}{2}(x_B-x_A))^m} & \text{for } x \in [x_A, x_B] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.15)$$

er en (C^{m-1}) -funktion, hvor $f_m(\frac{1}{2}(x_A + x_B)) = 1$. Sættes $m = 2$ fås en C^1 -funktion, hvilket sikrer, at funktionen f_2 er differentiabel og betingelsen om differentiability er således opfyldt.

Da pumpen kun virker på et afgrænset stykke af slangen og fordi den negative del af sinusfunktionen ikke medtages bliver pumpefunktionen en gaffelfunktion, i både sted og tid:

$$p_a(x, t) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \eta \frac{(x-x_A)^2 (x_B-x)^2}{(\frac{1}{2}(x_B-x_A))^4} \sin(2\pi\nu t) \right) & \text{for } x \in [x_A, x_B], t \in \{t \mid \sin(2\pi\nu t) > 0\} \\ p_0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.16)$$

hvor $p_0(1 + \eta)$ er det maksimale ydre tryk, der påtrykkes slangen og ν er frekvensen. I impulsbevarelsesligningen indgår den stedsafledte af pumpefunktionen og differentieres p_a med hensyn til x fås:

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = \begin{cases} p_0 \eta \frac{2(x-x_A)(x_B-x)(-2x+x_A+x_B)}{(\frac{1}{2}(x_B-x_A))^4} \sin(2\pi\nu t) & \text{for } x \in [x_A, x_B], t \in \{t | \sin(2\pi\nu t) > 0\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (3.17)$$

3.5 Begyndelsesbetingelserne

Til tiden $t = 0$ er systemet i ligevægt, det vil sige, at væskehøjden i de to kar er ens og givet ved $h_L(t = 0) = h_R(t = 0) = h_0$. Hvis h_0 er større end diameteren af slangen, vil væsken i karrene give anledning til et overtryk i slangen. Da trykket i slangen til $t = 0$ således er større end det ydre tryk medfører det, at slangen er udvidet inden pumpningen begynder. Trykket i slangen og derved tværsnitsarealet af slangen er bestemt ud fra det hydrostatiske tryk:

$$p_t(x, 0) = \rho g h_0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x, 0) = A_{rest} \left(1 - \frac{g h_0}{2 a_0^2}\right)^{-2}, \quad (3.18)$$

hvor A er beregnet fra udtryk (3.7) med indsættelse af udtrykket for a_0 , (3.12). Tværsnitsarealet af slangen til tiden $t = 0$ betegnes A_{start} . Begyndelsesbetingelserne for systemet er:

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.19)$$

$$A(x, 0) = A_{start} = A_{rest} \left(1 - \frac{g h_0}{2 a_0^2}\right)^{-2}. \quad (3.20)$$

3.6 Randbetingelserne

Randbetingelserne skal beskrive, hvordan hastigheden og tværsnitsarealet ændres på randen, det vil sige ved enderne af slangen. I den virkelige verden er tværsnitsarealet konstant på randen, fordi slangen er fastgjort til karrene. Men i modellen vil der opstå problemer, hvis arealet holdes konstant på randen. Dette skyldes, at slangen beskrives som en ring-model uden aksialt stress, hvilket betyder at en fastgørelse af tværsnitsarealet i den første og sidste ring ikke vil påvirke de tilstødende ringe og derfor vil kunne resultere i meget store gradienter mellem de to sidste ringe i hver ende af slangen.

I stedet modelleres den noget uvirkelige situation, hvor tværsnitsarealet er variabelt på randen. Dette giver dog alligevel anledning til problemer undervejs i opstillingen af randbetingelserne, men mere om det senere. Randbetingelserne fastsætter, hvordan væskestrømningshastigheden ændres på randen og resultatet bliver to koblede differentialligninger for hver rand, der beskriver hvordan hastigheden og væskehøjden i karrene ændres. I det følgende opstilles de to koblede differentialligninger for venstre rand; randbetingelserne for højre rand fås på samme vis og angives derfor efterfølgende uden mellemregninger.

På figur 3.4 er systemet afbildet med de i teksten anvendte betegnelser. Væskestrømningen er positiv, når væsken løber fra venstre til højre kar. Indeks h_l og h_r angiver

højdevariablene. Når der anvendes store bogstaver som fodindeks, eksempelvis h_L , er der tale om faktiske størrelser, her højden af væsken i venstre kar. Indeksene L_1 , R_1 , L_0 og R_0 anvendes også som indeks på u og A til at angive hastigheden og tværsnitsarealet ved henholdsvis venstre og højre rand og ved væskeoverfladen i karrene.

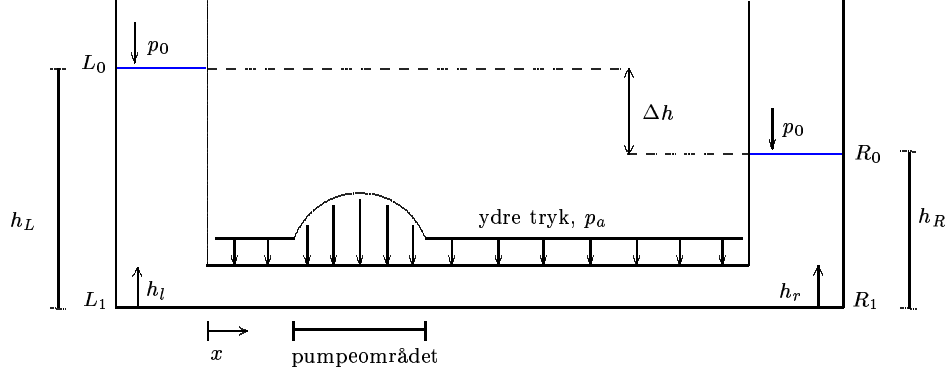


Figure 3.4 Figur af systemet med anvendte betegnelser.

I beskrivelsen af strømmingen i karrene skal impulsbevarelsesligningen på banen igen, men nu skal der også tages højde for tyngdekraften, der virker som en ydre kraft på væsken. Ved brug af vektoranalytiske sammenhænge¹ kan impulsbevarelsesligningen (2.16) skrives som [Panton, 1996, s. 317-319]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(g h) = -\frac{\mu}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (3.21)$$

hvor gravitationsleddet er skrevet som gradienten af potentialet, hvilket er muligt, da tyngdefeltet er konservativt. Hvis hastighedsfeltet er rotationsfrit, hvilket kun gælder for en ikke-viskøs væske, kan hastigheden skrives som gradienten af hastighedspotentialet, ϕ [Panton, 1996, s. 318]:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (3.22)$$

og da andet led på venstresiden og leddet på højresiden er nul for et rotationsfrit hastighedsfelt, kan ligning (3.21) reduceres til:

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{\rho} p + g h \right) = 0. \quad (3.23)$$

Denne ligning kaldes for den instationære Bernoulliligning, der for en stationær strømning, hvor $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, reduceres til den oftere anvendte Bernoulliligning for en stationær strømning. For den venstre rand fås, ved at integrere ligningen fra L_0 til L_1 , sammenhæn-

¹Der gælder følgende sammenhæng for det konvekitive led $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$, og for inkompressible væsker, hvor $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, gælder, at $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$.

gen mellem hastigheden af væskeoverfladen og hastigheden ved venstre rand af slangen:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{L_1} + \frac{1}{2} u_{L_1}^2 + \frac{p_{L_1}}{\rho} + g h_{L_1} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{L_0} + \frac{1}{2} u_{L_0}^2 + \frac{p_{L_0}}{\rho} + g h_{L_0} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} u_{L_1}^2 + \frac{p_{L_1}}{\rho} &= - \left[- \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{L_1}^{L_0} + \frac{1}{2} u_{L_0}^2 + \frac{p_{L_0}}{\rho} + g h_L \\ &= - \int_0^{h_L} \frac{\partial u}{\partial t} dh_l + \frac{1}{2} u_{L_0}^2 + \frac{p_{L_0}}{\rho} + g h_L, \end{aligned} \quad (3.24)$$

hvor første lighedstegn følger af, at $h_{L_1} = 0$ og $h_{L_0} = h_L$ og sidste lighedstegn følger af, at $-\frac{\partial \phi}{\partial t}$ er stamfunktion til $\frac{\partial u}{\partial t}(h_l)$. Integralet approksimeres med

$$- \int_0^{h_L} \frac{\partial u}{\partial t} dh_l \approx - \int_0^{h_L} \frac{\frac{\partial u}{\partial t}|_{L_1} + \frac{\partial u}{\partial t}|_{L_0}}{2} dh_l = - \int_0^{h_L} \frac{\frac{\partial u_{L_1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{L_0}}{\partial t}}{2} dh_l,$$

hvor approksimationen følger af, at den tidsafledte af u skrives som gennemsnittet af den tidsafledte ved overfladen og den tidsafledte ved slangens rand. Den tidsafledte af hastigheden ved overfladen kan omskrives til den tidsafledte ved randen, hvis kontinuitetsligningen

$$A_{kar} u_{L_0} = A_{L_1} u_{L_1} \quad (3.25)$$

benyttes. Og så opstår problemerne, som blev nævnt i starten af dette afsnit. Tværsnitsarealet på randen, A_{L_1} , er ikke konstant men en funktion af tiden, hvilket medfører, at den tidsafledte af tværsnitsarealet på randen indføres i bestemmelsen af den tidsafledte af hastigheden på randen. Dette vil komplicere ligningerne utroligt meget, hvilket er årsagen til, at jeg i dette skridt, som det også er gjort i [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003]², sætter tværsnitsarealet lig tværsnitsarealet til tiden $t = 0$. Differentiationen giver derfor:

$$\frac{\partial u_{L_0}}{\partial t} = \frac{A_{start}}{A_{kar}} \frac{\partial u_{L_1}}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Da den tidsafledte af hastigheden ved randen ikke afhænger af højden kan den sættes udenfor integraltegnet:

$$\begin{aligned} - \int_0^{h_L} \frac{\partial u}{\partial t} dh_l &\approx - \frac{1}{2} \int_0^{h_L} \left(1 + \frac{A_{L_1}}{A_{kar}} \right) \frac{\partial u_{L_1}}{\partial t} dh_l \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial u_{L_1}}{\partial t} \left(1 + \frac{A_{L_1}}{A_{kar}} \right) h_L. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Det tryk, p_{L_1} , som indgår på venstre side i randbetingelsen (3.24) er det indre tryk. Ved at bruge sammenhængen mellem tværsnitsarealet og trykket, givet ved den konstitutive ligning (3.7), kan det indre tryk elimineres:

$$p_{L_1} = 2\rho a_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{L_1}}} \right) + p_a, \quad (3.28)$$

hvor p_a er værdien af pumpefunktionen på randen, og her gælder $p_a = p_{L_0} = p_0$.

²I både [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003] antages det dog, at $A_{start} = A_{rest}$, men det ændrer ikke ved, at de på dette sted i opstillingen af modellen antager, at tværsnitsarealet er konstant.

Når væsken strømmer ind i og ud af karret vil der forekomme energitab, fordi der ved strømning ind i slangen sker en forsnævring af tværsnitsarealet, mens der ved strømning ind i karret sker en udvidelse og begge situationer bremser væsken. De to tilfælde modelleres samtidig ved at antage, at energitabet er proportionalt med kvadratet på hastigheden. Proportionalitetskonstanten betegnes ξ , og leddet $\frac{1}{2}(u_{L_1})^2$ i ligning (3.24) skal således erstattes af $\frac{1}{2}(1 + \xi)(u_{L_1})^2$. Denne beskrivelse af tabet er ikke helt i overensstemmelse med virkeligheden, fordi proportionalitetskonstanten afhænger af om der er tale om ind- eller udstrømning af slangen (for indstrømning er den $\frac{1}{2}$ og for udstrømning er den 1) [Rouse, 1978, s. 265], hvilket der ikke tages højde for.

Med indførslen af den konstitutive ligning samt tabsleddet, og ved brug af kontinuitetsligningen³, ligning (3.25), til at eliminere u_{L_0} fra ligning (3.24), og ved gentagelse af hele udledningen for den højre rand, fås de endelige randbetingelser ved isolering af den tidsafledte af u ved randen (indeks L_1 erstattes nu af L):

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} = \frac{1}{\left(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}\right) h_L} \left[\left(\left(\frac{A_L}{A_{kar}} \right)^2 - (1 + \xi) \right) u_L^2 - 4 a_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_L}} \right) + 2 g h_L \right] \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial t} = \frac{-1}{\left(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}\right) h_R} \left[\left(\left(\frac{A_R}{A_{kar}} \right)^2 - (1 + \xi) \right) u_R^2 - 4 a_0^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_R}} \right) + 2 g h_R \right] \quad (3.30)$$

I begge randbetingelser for væskestrømningshastigheden indgår højden af væsken i de to kar. Så det er nødvendigt med endnu to ligninger, der beskriver, hvordan væskehøjden ændres som funktion af tiden. Ændringen af væskehøjden er lig den vertikale hastighed af væskeoverfladen, det vil sige u_{L_0} for det venstre kar:

$$\frac{dh_L}{dt} = -u_{L_0}(t). \quad (3.31)$$

Fortegnet skyldes den anvendte fortegnskonvention, hvor hastigheden u er positiv, når væsken løber ud af venstre kar, mens ændringen af h_L i dette tilfælde er negativ. Benyttes kontinuitetsligningen, (3.25), kan hastigheden af væskeoverfladen omskrives til hastigheden ved randen:

$$\frac{dh_L}{dt} = -\frac{A_{L_1}}{A_{kar}} u_{L_1} = -\frac{A_L}{A_{kar}} u_L. \quad (3.32)$$

Tilsvarende fås randbetingelsen

$$\frac{dh_R}{dt} = \frac{A_R}{A_{kar}} u_R \quad (3.33)$$

for højre kar. Randbetingelserne for hver rand består således af to koblede ikke-lineære differentialligninger, der bestemt ikke gør det nemmere at løse modellen analytisk.

³Her er der ingen problemer i at antage, at tværsnitsarealet er variabelt.

3.7 Dimensionsløs form

I det følgende opstilles ligningerne, der udgør modellen for kar-systemet, på dimensionsløs form. På nuværende tidspunkt er de benyttede enheder meter og sekund, men disse enheder er ikke nødvendigvis karakteristiske for systemet. Med indførelsen af enheder i form af karakteristiske størrelser for systemet, opnås en mere generel model. Derudover opnår man også – forudsat at man vælger de rigtige karakteristiske størrelser – at de variable i modellen, i dette tilfælde tværsnitsarealet og væskestrømningshastigheden, bliver i samme størrelsesorden. Benyttes finite difference metoder til at løse modellen med, betyder det, at de differenser, som skal beregnes for at fremskrive modellen, er differenser mellem tal i samme størrelsesorden, hvilket burde medføre større numerisk præcision i beregningerne.

Da de variable er tværsnitsarealet og hastigheden, vælges hvileradius af slangen, r_0 , som karakteristisk længde, mens en gennemsnitlig væskestrømningshastighed, u_0 , vælges som karakteristisk hastighed. Den karakteristiske hastighed kendes ikke på forhånd, men skal bestemmes ud fra eksperimenter, eller ved at anslå en værdi, løse modellen og herefter korrigere værdien i forhold til løsningen. Ud fra de to karakteristiske størrelser kan en karakteristisk tid bestemmes.

De dimensionsløse variable betegnes med en *tilde*; eksempelvis angiver \tilde{u} den dimensionsløse hastighed. De nødvendige dimensionsløse variable er:

$$\tilde{x} = \frac{x}{r_0}, \quad \tilde{t} = \frac{u_0}{r_0} t, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{A} = \frac{A}{r_0^2}. \quad (3.34)$$

Ydermere indføres en kort skrivemåde for de dimensionsløse former af trykket (gældende både for p , p_a og p_0), frekvensen, højden (h_0 , h_L og h_R) og de konstante tværsnitsarealer:

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \tilde{\nu} = \frac{r_0}{u_0} \nu, \quad \tilde{h} = \frac{h}{r_0}, \quad \tilde{A}_{kar} = \frac{A_{kar}}{r_0^2}, \quad \tilde{A}_{start} = \frac{A_{start}}{r_0^2}. \quad (3.35)$$

Med indførelsen af de dimensionsløse variable ser ligningssystemet således ud på konservativ form:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \begin{pmatrix} \tilde{A} \tilde{u} \\ \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + 2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\tilde{A}_{rest}}{\tilde{A}}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial \tilde{x}} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{\tilde{u}}{\tilde{A}} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

hvor den stedsafledte af pumpefunktionen, p_a , i dimensionsløse variable er givet ved:

$$\frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial \tilde{x}} = \tilde{p}_0 \eta \frac{2(\tilde{x} - \tilde{x}_A)(\tilde{x}_B - \tilde{x})(-2\tilde{x} + (\tilde{x}_A + \tilde{x}_B))}{(\frac{1}{2}(\tilde{x}_B - \tilde{x}_A))^4} \sin(2\pi \tilde{\nu} \tilde{t}) \quad (3.37)$$

for $\tilde{x} \in [\tilde{x}_A, \tilde{x}_B]$ og $\tilde{t} \in \{t \mid \sin(2\pi \tilde{\nu} \tilde{t}) > 0\}$, ellers er den stedsafledte af p_a nul. I det inhomogene led i det dimensionsløse ligningssystem (3.36) er Reynolds tallet indført. Dette blev defineret i afsnit 2.2, ligning (2.6). På ikke-konservativ form fås ligningssystemet:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{A}_{rest}}{\tilde{A}^3}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial \tilde{x}} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{\tilde{u}}{\tilde{A}} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Bølgehastigheden, \tilde{a} , er på dimensionsløs form givet ved:

$$\tilde{a} = \frac{a_0}{u_0} \sqrt[4]{\frac{\tilde{A}_{rest}}{\tilde{A}}}. \quad (3.39)$$

Udover Reynolds tal, indføres endnu en dimensionsløs størrelse, Froude tallet, Fr . I afsnit 2.4 blev der givet en fysisk fortolkning af Reynolds tal, som forholdet mellem de inertielle og viskøse kræfter, og på samme måde kan Froude tallet tillægges en fysisk fortolkning, nemlig som forholdet mellem de inertielle og gravitationelle kræfter i systemet⁴:

$$Fr = \frac{u_0^2}{g r_0}. \quad (3.40)$$

Froude tallet indføres i begyndelsesbetingelserne for tværsnitsarealet, hvor tyngdeaccelerationen indgår på grund af det hydrostatiske tryk, der er i slangen:

$$A(x, 0) = A_{rest} \left(1 - \frac{g h_0}{2 a_0^2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \tilde{A}(\tilde{x}, 0) = \tilde{A}_{rest} \left(1 - \frac{u_0^2}{2 a_0^2} \frac{\tilde{h}_0}{Fr}\right)^{-2}, \quad (3.41)$$

og samlet er begyndelsesbetingelserne på dimensionsløs form:

$$\tilde{u}(x, 0) = 0 \quad (3.42)$$

$$\tilde{A}(\tilde{x}, 0) = \tilde{A}_{rest} \left(1 - \frac{u_0^2}{2 a_0^2} \frac{\tilde{h}_0}{Fr}\right)^{-2}. \quad (3.43)$$

Randbetingelserne for væskestrømningshastigheden på dimensionsløs form:

$$\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tilde{A}_{start}}{\tilde{A}_{kar}}\right) \tilde{h}_L} \left[\left(\frac{\tilde{A}_L}{\tilde{A}_{kar}} - (1 + \xi) \right) \tilde{u}_L^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\tilde{A}_{rest}}{\tilde{A}_L}} \right) + \frac{2 \tilde{h}_L}{Fr} \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_R}{\partial \tilde{t}} = \frac{-1}{\left(1 + \frac{\tilde{A}_{start}}{\tilde{A}_{kar}}\right) \tilde{h}_R} \left[\left(\frac{\tilde{A}_R}{\tilde{A}_{kar}} - (1 + \xi) \right) \tilde{u}_R^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\tilde{A}_{rest}}{\tilde{A}_R}} \right) + \frac{2 \tilde{h}_R}{Fr} \right] \quad (3.45)$$

Ligningerne for væskehøjden i karrene ændrer ikke form ved skiftet til dimensionsløse variable:

$$\frac{d\tilde{h}_L}{d\tilde{t}} = - \frac{\tilde{A}_L}{\tilde{A}_{kar}} \tilde{u}_L \quad (3.46)$$

$$\frac{d\tilde{h}_R}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{A}_R}{\tilde{A}_{kar}} \tilde{u}_R. \quad (3.47)$$

De ovenfor anførte ligninger udgør modellen, som beskriver væskestrømningen i slangen, pumpen virkende på slangen og den resulterende forskel mellem væskehøjden i karrene. I resten af rapporten udelades tilden over dimensionsløse variable, men det burde fremgå af sammenhængen hvornår der tales om henholdsvis dimensionelle og dimensionsløse variable.

3.8 Linearisering af ligningssystemet og randbetingelserne

En hyppigt anvendt måde at forenkle en ikke-lineær model på, er at linearisere ligningerne, hvilket i nogle tilfælde kan muliggøre en analytisk løsning. Lineariseringen består

⁴Der er to måder at angive Froude tallet på; enten som i ligning (3.40) eller som $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g r_0}}$. [Weisstein, 2004]

i at rækkeudvikle de afhængige variable til første orden omkring en kendt løsning. Den kendte løsning sættes til at være defineret ved begyndelsesbetingelserne, hvor væsken er i hvile, det vil sige $u = 0$, og tværsnitsarealet har værdien $A = A_{start}$. En hurtig måde at foretage lineariseringen på er at indsætte førsteordens rækkeudviklingerne af u og A , nemlig $u = 0 + u'$ og $A = A_{start} + A'$, i ligningerne og herefter reducere ligningerne til første orden. Indsættes dette i masse- og impulsbevarelsesligningerne på ikke-konservativ, dimensionsløs form fås fra (3.38):

$$\frac{\partial(A_{start} + A')}{\partial t} + u' \frac{\partial(A_{start} + A')}{\partial x} + (A_{start} + A') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{(A_{start} + A')^3}} \frac{\partial(A_{start} + A')}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \\ - \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma + 2)\pi}{Re} \frac{u'}{(A_{start} + A')} \cdot \end{aligned} \quad (3.49)$$

Det midterste led på venstresiden af ligning (3.49) rækkeudviklet til første orden giver:

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{(A_{start} + A')^3}} \frac{\partial(A_{start} + A')}{\partial x} &= \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}^3}} \left(1 + \frac{A'}{A_{start}}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial A'}{\partial x} \\ &\approx \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}^3}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{A'}{A_{start}}\right) \frac{\partial A'}{\partial x} \\ &\approx \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}^3}} \frac{\partial A'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Medtages kun førsteordens leddene i (3.48) og (3.49) fås de lineariserede masse- og impulsbevarelsesligninger:

$$\frac{\partial A'}{\partial t} + A_{start} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}^3}} \frac{\partial A'}{\partial x} = - \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma + 2)\pi}{Re} \frac{u'}{A_{start}}, \quad (3.52)$$

hvor rækkeudviklingen af det viskøse led er fremkommet ved tilsvarende approksimationer, som det andet led i impulsningen (3.50). De to ligninger kan samles i ét lignings-system på konservativ form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A' \\ u' \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A_{start} u' \\ \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}^3}} A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma + 2)\pi}{Re} \frac{u'}{A_{start}} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

I randbetingelserne (3.44) og (3.45) indsættes udover rækkeudviklingerne af tværsnitsarealet og hastigheden også rækkeudviklingen af højden, således at $h_L = h_0 + h'_L$ og $h_R = h_0 + h'_R$. For venstre og højre randbetingelse, der giver den tidsafledte af hastigheden, bliver den lineariserede udgave således:

$$\frac{\partial u'_L}{\partial t} = \frac{-4}{\left(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}\right) h_0} \frac{a_0^2}{u_0^2} \left[1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}} \left(1 - \frac{A'_L}{A_{start}}\right) - \frac{h'_L}{h_0} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}}\right) - \frac{2 h'_L}{Fr} \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u'_R}{\partial t} = \frac{4}{\left(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}\right) h_0} \frac{a_0^2}{u_0^2} \left[1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}} \left(1 - \frac{A'_R}{A_{start}}\right) - \frac{h'_R}{h_0} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}}\right) - \frac{2 h'_R}{Fr} \right] \quad (3.55)$$

Lineariseringen af randbetingelserne for væskehøjden i karrene (3.46) og (3.47) bliver:

$$\frac{dh'_L}{dt} = -\frac{A_{start}}{A_{kar}} u'_L \quad (3.56)$$

$$\frac{dh'_R}{dt} = \frac{A_{start}}{A_{kar}} u'_R. \quad (3.57)$$

3.9 Den primære model – en oversigt

I de foregående afsnit har jeg opstillet en model for væskestrømningen i kar-systemet, hvilket indebærer en beskrivelse af strømningen i den elastiske slange, en beskrivelse af pumpen, begyndelsesbetingelser og endelig randbetingelser, hvori beskrivelsen af karrene er indeholdt. Resten af rapporten går ud på at undersøge modellen numerisk. For at få et overblik over de ligninger, der udgør modellen, er de i det følgende opstillet samlet på dimensionsløs form. Jeg har som udgangspunkt valgt en simpel udgave af pumpefunktionen, hvor funktionen kun er en gaffelfunktion i stedsvariablen og ikke i tiden. Den anden beskrivelse vil blive undersøgt separat.

Væskestrømningen i den elastiske slange

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A u \\ \frac{1}{2} u^2 + 2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u}{A} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Pumpen

$$p_a(x, t) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \eta \frac{(x-x_A)^2 (x_B-x)^2}{(\frac{1}{2}(x_B-x_A))^4} \sin(2\pi \nu t) \right) & \text{for } x \in [x_A, x_B] \\ p_0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.59)$$

Begyndelsesbetingelser

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.60)$$

$$A(x, 0) = A_{rest} \left(1 - \frac{u_0^2}{2 a_0^2} \frac{h_0}{Fr} \right)^{-2}. \quad (3.61)$$

Randbetingelser

Randbetingelser for væskestrømningshastigheden:

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} = \frac{1}{(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}) h_L} \left[\left(\frac{A_L}{A_{kar}} - (1 + \xi) \right) u_L^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_L}} \right) + \frac{2 h_L}{Fr} \right] \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial t} = \frac{-1}{(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}) h_R} \left[\left(\frac{A_R}{A_{kar}} - (1 + \xi) \right) u_R^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_R}} \right) + \frac{2 h_R}{Fr} \right] \quad (3.63)$$

og for væskehøjderne i karrene:

$$\frac{dh_L}{dt} = -\frac{A_L}{A_{kar}} u_L \quad (3.64)$$

$$\frac{dh_R}{dt} = \frac{A_R}{A_{kar}} u_R. \quad (3.65)$$

I det følgende afsnit præsenteres de numeriske metoder med udgangspunkt i ovenstående model, som jeg henviser til som den *primære model*.

4 Numeriske metoder

I dette afsnit introduceres de tre numeriske metoder, som jeg har brugt til undersøge modellen med. Til løsningen af ligningssystemet på det indre af stedsdomænet bruges henholdsvis Richtmyers to-trins Lax-Wendroff-algoritme og MacCormack-algoritmen. Til bestemmelse af randværdierne bruges karakteristikmetoden. Alle metoderne er finite difference metoder, hvor integrationen udføres ved at approksimere differentialkvotienter med differenskvotienter.

Dette afsnit begynder med en kort introduktion til finite difference metoder. Herefter følger en præsentation af de to algoritmer. Begge algoritmer præsenteres først for ligningssystemer på konservativ form, mens MacCormack-algoritmen også præsenteres for ikke-konservative former, da det er den algoritme, der i denne rapport bruges til at løse ligningerne med i det tilfælde, hvor de ikke kan opskrives på konservativ form. Stabilitetsbetingelserne, som er ens for de to algoritmer, omtales kort.

Derefter introduceres karakteristikmetoden med udgangspunkt i ligningssystemet i den primære model og præsentationen af denne metode er derfor mere specifik end præsentationen af de to andre metoder. Herefter opstilles de diskretiserede ligninger for de indre punkter og differensligningerne for væskestrømningshastigheden på randen og væskehøjden i karrene. Afslutningsvis benyttes karakteristikmetoden til at fremskrive værdien for tværsnitsarealet på randen.

Undervejs i dette afsnit bruges den primære model beskrevet på forrige side som eksempel. De præsenterede numeriske metoder anvendes senere på modeller, hvor der er foretaget ændringer i forhold til den primære model, blandt andet hvor tilfældet $\Gamma \neq 0$ undersøges.

4.1 Princippet i finite difference metoder

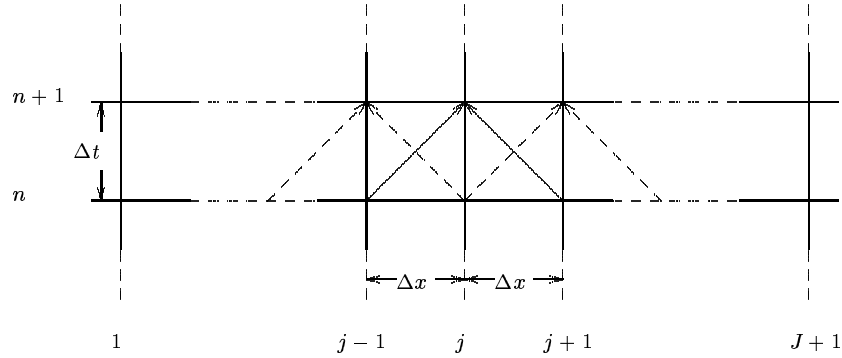
I finite difference metoder løses differentiaalligninger på et gitter i (x, t) -planen ved at approksimere differentialkvotienter med differenskvotienter, som herefter 'integreres' ved isolering af den ubekendte. Ønskes den lineære førsteordens differentiaalligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = g(x, t) \quad (4.1)$$

løst på domænet $x \in [0, l]$ og $t \in [0, T]$, inddeles stedsdomænet i J intervaller af længden Δx og tidsdomænet diskretiseres i intervaller af længden Δt . Løsningsværdien i det $(j, n + 1)$ 'te gitterpunkt, hvilket i steds- og tidskoordinater svarer til punktet $(j \cdot \Delta x, (n + 1) \cdot \Delta t)$,

bliver ved en simpel centreret¹ algoritme, se illustrationen på figur 4.1:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} &= g_j^n \Rightarrow \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \Delta t g_j^n. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Figur 4.1 Inddeling af domænet med stedet på den vandrette akse og tiden på den lodrette. Venstre rand ligger i $j = 1$ og højre rand i $j = J + 1$. Den centrerede algoritme bruger værdierne i de to nabopunkter til punktet (j, n) til at beregne den nye værdi i punktet $(j, n + 1)$. Bemærk at fremskrivningen i punktet j ikke afhænger af værdien i punktet j til det foregående tidsskridt.

MacCormack og Lax-Wendroff algoritmerne fungerer i princippet på samme måde, men hvor den simple centrerede algoritme består af ét trin forløber de to andre algoritmer over to trin, dog på hver deres måde. Den ovenstående opdeling af domænet benyttes i den videre gennemgang.

4.2 MacCormack-algoritmen

MacCormack-algoritmen er i originalartiklen anvendt på de ikke-viskøse Navier-Stokes-ligninger i to dimensioner, som udover kontinuitets- og impulsbevarelsesligningen også indeholder en energibevarelsesligning [MacCormack, 1969]. I det følgende præsenteres algoritmen for et ligningssystem på konservativ form svarende til (3.58), kort skrevet som:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{g}. \quad (4.3)$$

I algoritmens første trin beregnes en foreløbig værdi af \mathbf{w}_j^{n+1} , mens en korrigeret værdi beregnes i andet trin. Første trin ser ud som følger:

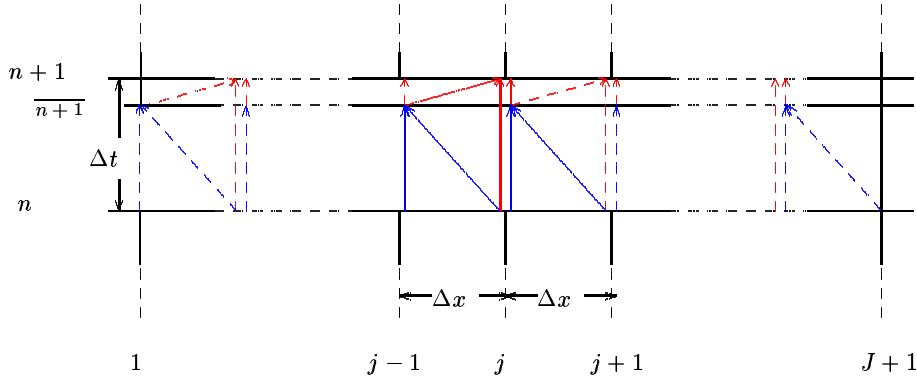
$$\mathbf{w}_j^{\overline{n+1}} = \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n) + \Delta t \mathbf{g}_j^n, \quad (4.4)$$

¹Centreret henviser til, at den stedlige afledte beregnes ved de to nabopunkter til det j 'te punkt i modsætning til fremadrettede og bagudrettede algoritmer, hvor differentialkvotienten approksimeres med henholdsvis $\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$ og $\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$.

hvor ‘baren’ over $(n + 1)$ angiver, at det er den foreløbige værdi af w i punktet $(j, n + 1)$. I udtrykket ses det, at den stedslige differenskvotient beregnes ved en fremadrettet differens. Korrektionstrinnet ser således ud:

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(w_j^n + \overline{w_j^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{f_j^{n+1}} - \overline{f_{j-1}^{n+1}} \right) + \Delta t g_j^{n+1}, \quad (4.5)$$

hvor $\overline{f_j^{n+1}} = f(\overline{w_{j-1}^{n+1}})$ og $\overline{g_j^{n+1}} = g(\overline{w_{j-1}^{n+1}})$. Den værdi af w , der beregnes i det første trin, udtryk (4.4), indsættes således i vektorerne f og g , der bruges til at beregne den korrigerede værdi. I modsætning til første trin, beregnes den stedslige differenskvotient ved en bagudrettet differens i korrektionstrinnet. Netop beregningerne af de stedslige afledte giver anledning til en asymmetri i algoritmen, hvilket kan ses på figur 4.2. I første trin bruges differensen mellem værdierne i punkterne $(j + 1, n)$ og (j, n) , som altså er de gamle værdier, mens det i andet trin er differensen mellem værdierne i punkterne $(j, \overline{n + 1})$ og $(j - 1, \overline{n + 1})$, der er de foreløbige fremskrevne værdier. Den bagudrettede differens i andet trin kan derfor ikke forventes at give en præcis opvejning af den fremadrettede differens fra første trin.



Figur 4.2 Illustration af MacCormack-algoritmen. Første trin er angivet med blåt, mens korrektionstrinnet er angivet med rødt. De fuldt optrukne linier forbinder de punkter, der er med i beregningen af værdien i punktet $(j, n + 1)$. Tidslinierne ved $n + 1$ og n burde være placeret oveni hinanden, idet forskellen $(n + 1 - n)$ også er én. I modsætning til den simple centrerede algoritme bruges værdien i punktet j til at fremskrive værdien i dette punkt.

Algoritmen benyttes i litteraturen også på systemer, der ikke er på konservativ form, hvor det ikke er tids- og stedsafledte af vektorer, der skal approksimeres, men tids- og stedsafledte af funktioner [Rath, 1976][Smith et al., 2002][Bellos & Hrisanthou, 2003]. Lad nu w være en funktion af x og t , i den aktuelle model er w pladsholder for $A(x, t)$ og $u(x, t)$, tværsnitsarealet og væskestrømningshastigheden. Ud fra første trin i algoritmen, ses det, at den tidsafledte og stedsafledte er approksimeret ved:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_j \sim \frac{\overline{w_j^{n+1}} - w_j^n}{\Delta t} \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_j \sim \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{\Delta x}, \quad (4.7)$$

Og i korrektionstrinnet er de tids- og stedsafledte approksimeret ved:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_j \sim \frac{w_j^{n+1} - \frac{w_j^n + w_j^{n+1}}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_j \sim \frac{w_j^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}. \quad (4.9)$$

I korrektionstrinnet (4.8) ses det, at den tidsafledte approksimeres ved differensen mellem w_j^{n+1} og gennemsnitsværdien mellem værdien af w i punktet (j, n) og den foreløbige værdi i punktet $(j, n + 1)$; det svarer til et halvt tidsskridt, hvorfor der divideres med $\frac{\Delta t}{2}$.

4.3 Lax-Wendroff-algoritmen

Robert D. Richtmyers to-trins version af Lax-Wendroff-algoritmen, som er den udgave af Lax-Wendroff-algoritmen, der benyttes i dette projekt, bruger både tids- og stedslemleskridt [Richtmyer & Morton, 1967, s. 303]. I [Richtmyer & Morton, 1967] benyttes algoritmen på et homogent ligningssystem, mens udvidelsen af algoritmen til det inhomogene system blandt andet er brugt i [Pearson & Winterbone, 1997]. Algoritmen kan udledes ved Taylorrækkeudvikling til anden orden i Δx og Δt og kaldes derfor en andenordens algoritme [Peskin, 1976, s. 196-201].

Tages igen udgangspunkt i ligningssystemet (4.3) giver første trin i algoritmen en beregning af værdien af w i steds- og tidsmelleskridtet $(j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$:

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (w_{j+1}^n + w_j^n) - \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{2} (g_{j+1}^n + g_j^n). \quad (4.10)$$

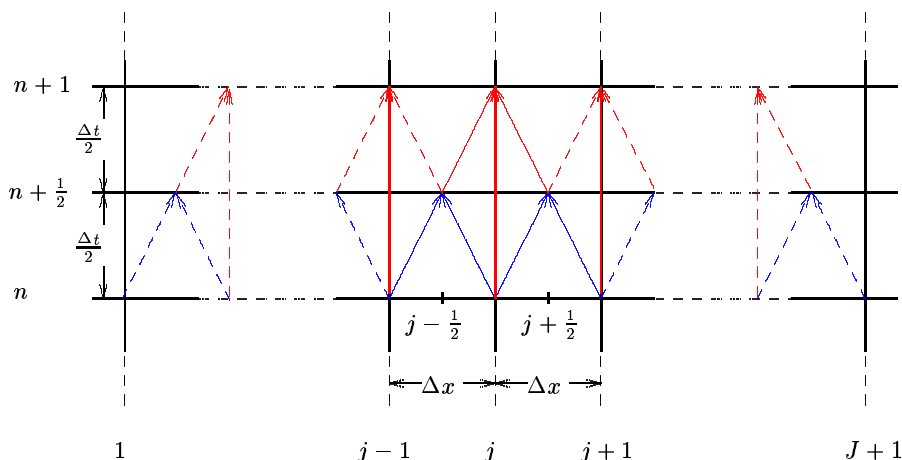
I andet trin bruges værdien i punkterne (j, n) , $(j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ og $(j - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2})$ til at beregne værdien i punktet $(j, n + 1)$:

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t \frac{1}{2} (g_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (4.11)$$

hvor $f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ og $f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f(w_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ og tilsvarende med $g_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. På figur 4.3 ses, at Lax-Wendroff-algoritmen nemmere lader sig illustrere end MacCormack-algoritmen og det er også muligt at se på figuren, at Lax-Wendroff-algoritmen ikke har den samme indbyggede asymmetri som MacCormack-algoritmen.

4.4 Stabilitetsbetingelse

En nødvendig betingelse for numerisk stabilitet for begge metoder bestemmes ud fra en linearisering af ligningssystemet. Tanken er, at hvis den numeriske metode anvendt på det lineære ligningssystem ved indsættelse af en generel løsning ikke er stabil, så vil metoden heller ikke være stabil i det ikke-lineære tilfælde. Den stabilitetsbetingelse, der kan udledes ud fra det lineære ligningssystem, giver derfor ikke en tilstrækkelig betingelse for stabilitet af den numeriske løsning, når ligningssystemet er ikke-lineært, men kun en nødvendig betingelse.



Figur 4.3 Illustration af Lax-Wendroff-algoritmen. Første trin er angivet med blåt, mens andet trin er angivet med rødt. De fuldt optrukne linier forbinder de punkter, der er med i beregningen af værdien i punktet $(j, n + 1)$. Bemærk at de to rander ikke fremskrives. Også i denne algoritme bruges værdien i punktet j til at fremskrive værdien i dette punkt.

Stabilitetsbetingelsen for algoritmerne, også kaldet CFL-betingelsen², giver et nedre bånd på forholdet mellem steds- og tidsskridtslængden, der er bestemt ved den numerisk største egen værdi for koefficientmatricen, som i udledningen af CFL-betingelsen antages konstant [Peskin, 1976, s. 202-206]. Benyttes i stedet egen værdierne for koefficientmatricen i det ikke-lineære ligningssystem, c_{\pm} , bliver stabilitetsbetingelsen:

$$\max |c_{\pm}| = \max |u \pm a| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (4.12)$$

Det er selvfølgelig ønskeligt, at stedsskridtene er så små som muligt, fordi detaljeringsgraden af løsningen afhænger af dette. Men jo mindre Δx sættes, jo mindre tvinges Δt til at være, hvilket er kernen i problemerne ved numeriske metoder. Jo mindre værdien af Δt er, jo længere tid tager en beregning, så den nærmere fastsættelse af Δx og Δt bliver et spørgsmål om kørselstid kontra præcision og detaljeringsgrad. Dog skal man huske, at stabilitetsbetingelsen (4.12) kun er en nødvendig betingelse, hvilket betyder, at det kan være nødvendigt med en finere diskretisering af tids- og stedsdomænet for at opnå numerisk stabilitet.

4.5 Karakteristikmetoden

Hyperbolske differentiaalligninger har den egenskab, at der findes kurver i (x, t) -planen langs hvilke systemet af partielle differentiaalligninger reduceres til et system af ordinære differentiaalligninger (ODE). Formålet med at opstille ODE-systemet er, at det faktisk giver en metode at løse PDE-systemet på. Kan man bestemme løsningen langs kurverne, kan løsningen til et givet punkt (x_0, t_0) også bestemmes og løsningen af modellen på de

²Bogstaverne står for Courant-Friedrich-Lewy [MacCormack, 1969].

indre punkter af domænet kunne således også beregnes ved denne metode. [Logan, 1994, s. 194-197]

Kurverne i (x, t) -planen kaldes karakteristikker, og det er kurver langs hvilke signalerne i systemet udbredes. I et lineært PDE-system er hældningen af karakteristikkene konstante, mens hældningen af karakteristikkene i et ikke-lineært system, som det nærværende, afhænger af løsningen, det vil sige, at tværsnitsarealet og væskestrømningshastigheden indgår i ligningerne for karakteristikkene [Fletcher, 1988, s. 30-31].

I den følgende udledning er det nødvendigt at betragte ligningssystemet i den primære model på ikke-konservativ form:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{B}, \quad (4.13)$$

hvor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A r_{gs}}{A^3}} & u \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Lad $(t, x(t))$ være parameterfremstillingen for en kurve S i (t, x) -planen. I det følgende ønskes at bestemme en betingelse for S således, at de to partielle differentialligninger i ligningssystemet reduceres til to ordinære differentialligninger langs kurven; det svarer til at bestemme en kurve, hvor de afledte af A og u er givet ved de retningsafledte langs kurven. Lad c være retningen på eller hældningen af kurven S :

$$c = \frac{dx}{dt}. \quad (4.15)$$

Da er det totale differential langs S for enhver differentiabel funktion \mathbf{w} givet ved:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}. \quad (4.16)$$

Betragt nu en linearkombination af de to ligninger i (4.13):

$$\gamma^t \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \gamma^t \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \gamma^t \mathbf{B}, \quad (4.17)$$

hvor $\gamma^t = (\gamma_1 \gamma_2)$. Linearkombinationen ønskes at kunne skrives som en linearkombination af de retningsafledte af A og u langs S , hvilket betyder at der for en vektor \mathbf{m} skal gælde, at [Logan, 1994, s. 196]

$$\mathbf{m}^t \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \gamma^t \mathbf{B}. \quad (4.18)$$

Sammenlignes (4.17) og (4.18) fås betingelser på de indførte størrelser:

$$\gamma^t = \mathbf{m}^t \quad \text{og} \quad \gamma^t \mathbf{A} = \mathbf{m}^t c, \quad (4.19)$$

hvilket betyder, at γ er en venstre egenvektor til \mathbf{A} med tilhørende egenværdi c :

$$\gamma^t \mathbf{A} = \gamma^t c \quad \Rightarrow \quad \gamma^t (\mathbf{A} - c\mathbf{I}) = 0. \quad (4.20)$$

Lad (c, γ^t) være en egenværdi for \mathbf{A} med tilhørende egenvektor. Fra (4.18) og (4.19) og ved at benytte udtryk (4.16) for det totale differential, fås at:

$$\gamma^t \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) = \gamma^t \mathbf{B}. \quad (4.21)$$

Dette er et system af ordinære differentiaalligninger, som gælder langs kurven S . I ligningen indgår egenvektorerne for \mathbf{A} , som bestemmes samlet ved at sætte $\gamma^t = (1, \gamma_2)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - c & A \\ \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}} & u - c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (u - c) + \gamma_2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}} \\ A + \gamma_2 (u - c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm a + \gamma_2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A^3}} \\ A \pm \gamma_2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

hvor andet lighedstegn følger ved at benytte, at $u - c = \pm a$, som blev udregnet i afsnit 3.3, ligning (3.11), på dimensionel form og angivet i afsnit 3.7 på dimensionsløs form, ligning (3.39). Løses ligningssystemet med hensyn til γ_2 (ligningerne i de to rækker er lineært afhængige, så den nederste betragtes) fås:

$$A \pm \gamma_2 a = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \mp \frac{A}{a}. \quad (4.23)$$

Egenvektoren svarende til egenværdien $c_- = (u - a)$ er således $\gamma_-^t = (1, -\frac{A}{a})$, og egenvektoren svarende til egenværdien $c_+ = (u + a)$ er $\gamma_+^t = (1, \frac{A}{a})$. Indsættes egenvektorerne i udtryk (4.21):

$$\begin{pmatrix} 1 & \mp \frac{A}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dA}{dt} \\ \frac{du}{dt} - b(A, u) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.24)$$

hvor $b(A, u) = -\frac{\partial p_a}{\partial x} - F(A, u)$, fås to ordinære differentiaalligninger:

$$\frac{dA}{dt} \mp \frac{A}{a} \left(\frac{du}{dt} - b(A, u) \right) = 0 \quad (4.25)$$

der gælder langs karakteristikkene defineret ved:

$$\frac{dx}{dt} = u \mp a. \quad (4.26)$$

Der er altså tale om *to* familier af kurver i (t, x) -planen, hvor den ene er bestemt ved $\frac{dx}{dt} = (u - a)$, mens den anden er bestemt ved $\frac{dx}{dt} = (u + a)$, hvilket skyldes, at ligningssystemet er hyperbolsk. ODE-systemet kan ikke løses analytisk og man er også her nødt til at approksimere differentialkvotienterne med differenskvotienter for at bestemme værdierne på randen.

4.6 Fremskrivningen af ligningerne

I det følgende opstilles de ligninger, der bruges i MatLab-programmet til at beregne de fremskrevne værdier af hastigheden, tværsnitsarealet og højdeforskellen mellem væsken i de to kar. Som nævnt benyttes MacCormack- og Lax-Wendroff-algoritmerne til at fremskrive værdierne for de indre punkter, og fremskrivningen af hastigheden på randen og væskehøjden i de to kar udføres ved en simpel differensapproximation, mens randbetin- gelsen for tværsnitsarealet beregnes ved karakteristikmetoden.

4.6.1 Fremskrivningen i de indre punkter

Der tages udgangspunkt i MacCormack-algoritmen (på konservativ form) i det følgende. Da opbygningen af Lax-Wendroff- og MacCormack-algoritmerne i princippet er ens, idet de begge bruges på konservative ligningssystemer og er i to trin, vil en opskrivning af de diskretiserede ligninger med MacCormack-algoritmen nemt kunne oversættes til Lax-Wendroff-algoritmen. Det virker derfor overflødigt at opskrive ligningerne for begge algoritmer. Lad \mathbf{w} , $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2)^t$ og $\mathbf{g} = (g_1 \ g_2)^t$ i ligning (4.3) være givet ved

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Au \\ \frac{1}{2} u^2 + 2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}}\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u}{A} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Antag, at \mathbf{w}_j^n , \mathbf{f}_j^n og \mathbf{g}_j^n er givet for $j = 1, \dots, J+1$. De foreløbige fremskrevne værdier, A_j^{n+1} og u_j^{n+1} , beregnes herefter ved brug af ligning (4.4). I det andet trin skal de foreløbige fremskrevne værdier af \mathbf{f} og \mathbf{g} benyttes; de beregnes enkeltvis:

$$f_{1j}^{\overline{n+1}} = A_j^{\overline{n+1}} u_j^{\overline{n+1}} \quad (4.28)$$

$$f_{2j}^{\overline{n+1}} = \frac{1}{2} (u_j^{\overline{n+1}})^2 + 2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_j^{\overline{n+1}}}}\right) \quad (4.29)$$

$$g_{1j}^{\overline{n+1}} = 0 \quad (4.30)$$

$$g_{2j}^{\overline{n+1}} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \Big|_j^{\overline{n+1}} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u_j^{\overline{n+1}}}{A_j^{\overline{n+1}}}, \quad (4.31)$$

hvor den afledte af pumpefunktionen i punktet $(j, \overline{n+1})$ er givet ved:

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} \Big|_j^{\overline{n+1}} = \frac{\partial p_a}{\partial x} \Big|_j^{n+1} = p_0 \eta \frac{-2x_j + (x_A + x_B)}{(x_B - x_A)^2} \sin(2\pi\nu(n+1)\Delta t). \quad (4.32)$$

Herefter beregnes korrektionstrinnet givet ved ligning (4.5) og til sidst beregnes de endelige fremskrevne værdier af \mathbf{f} og \mathbf{g} :

$$f_{1j}^{n+1} = A_j^{n+1} u_j^{n+1} \quad (4.33)$$

$$f_{2j}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_j^{n+1})^2 + 2 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_j^{n+1}}}\right) \quad (4.34)$$

$$g_{1j}^{n+1} = 0 \quad (4.35)$$

$$g_{2j}^{n+1} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \Big|_j^{n+1} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u_j^{n+1}}{A_j^{n+1}}, \quad (4.36)$$

hvor den afledte af pumpefunktionen igen er givet ved ligning (4.32). De ovenstående ligninger kan genfindes i MatLab-programmet.

4.6.2 Fremskrivning i randpunkterne

I afsnit 3.6 blev der opstillet to randbetingelser for hver rand, som beskrev, hvordan den tidsafledte af hastigheden afhænger af tværsnitsarealet, væskehøjden i karrene og

bølgehastigheden, og to differentiallyigninger, der beskriver ændringen af væskehøjden. I afsnit 3.7 blev randbetingelserne angivet på dimensionsløs form. Differentiallyigningerne, der beskriver strømningshastigheden på randen, approksimeres ved at erstatte differentialekvotienten med en differenskvotient og benytte tværsnitsarealet og væskehøjden til den foregående tid; her for den venstre rand:

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} = \frac{1}{\left(1 + \frac{A_{star}}{A_{kar}}\right) h_L^n} \left[\left(\frac{A_1^n}{A_{kar}} - (1 + \xi) \right) (u_1^n)^2 + 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_1^n}} \right) + \frac{2 h_L^n}{Fr} \right] \quad (4.37)$$

Den nye værdi for væskehøjden i det venstre kar bestemmes ved en tilsvarende approksimation af den tidsafledte af væskehøjden:

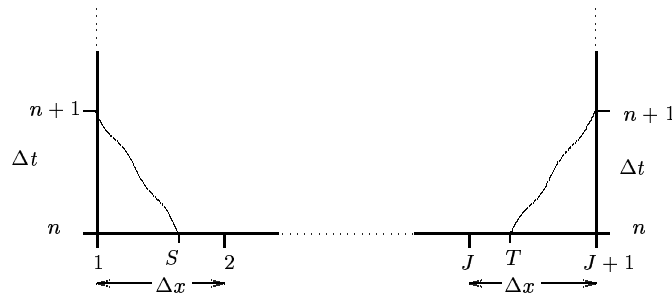
$$\begin{aligned} \frac{h_L^{n+1} - h_L^n}{\Delta t} &= -\frac{A_1^n}{A_{kar}} u_1^n \Rightarrow \\ h_L^{n+1} &= h_L^n - \frac{A_1^n}{A_{kar}} u_1^n \Delta t. \end{aligned} \quad (4.38)$$

På højresiden benyttes de gamle værdier af tværsnitsarealet og hastigheden, så i programmet er det nødvendigt at gemme værdierne fra det foregående skridt³. Tilsvarende ligninger fås for den højre rand. Højdeforskellen mellem væsken i de to kar fås ved differensen mellem de fremskrevne værdier af væskehøjderne:

$$\Delta h^{n+1} = (h_R)^{n+1} - (h_L)^{n+1}. \quad (4.39)$$

Hvis u er positiv, strømmer væsken fra venstre mod højre, hvilket giver en større væskehøjde i det højre kar og derfor bliver Δh positiv. Der er således overensstemmelse i fortegnskonventionen.

Men hvordan foretages fremskrivningen af tværsnitsarealet? Her kommer det ODE-system, der blev opstillet i foregående afsnit, afsnit 4.5, på banen. I det følgende anvendes notationen, som er vist i figur 4.4.



Figur 4.4 Figuren viser karakteristikkene til at beregne værdierne i randpunkterne $(1, n+1)$ og $(J+1, n+1)$. På figuren er det illustreret, at hældningen af karakteristikkene ikke er konstant. Bemærk, at det er (x, t) -planen, der betragtes, så hældningen af karakteristikkene på figuren er lig $\frac{1}{c}$.

³I [Borzi & Propst, 2003] og [Rath, 1976] benyttes de *fremskrevne* værdier af tværsnitsarealet og hastigheden i stedet i fremskrivningen af væskehøjden. Forskellen på de numeriske løsninger med de to forskellige approksimationer viser sig at være ubetydelig.

Først betragtes venstre rand. Ud fra det opstillede ODE-system kan en approksimativ sammenhæng mellem de fremskrevne værdier for A og u opstilles:

$$(A_1^{n+1} - A_S^n) - \frac{A_S^n}{a_S^n} ((u_1^{n+1} - u_S^n) - b_S^n \Delta t) = 0, \quad (4.40)$$

langs approksimationen af hældningen af karakteristikken

$$(u_S^n - a_S^n) = \frac{x_1^{n+1} - x_S^n}{t_1^{n+1} - t_S^n} = \frac{x_1^n - x_S^n}{\Delta t}, \quad (4.41)$$

hvor $b_S^n = -\frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u_S^n}{A_S^n}$, idet $\frac{\partial p_a}{\partial x} = 0$, da p_a er konstant udenfor pumpeområdet. Værdien af u i punktet $(1, n+1)$ bestemmes ud fra Bernouilli-randbetingelsen, så A_S^n , u_S^n og a_S^n mangler at blive bestemt, før A_1^{n+1} kan beregnes ved ligning (4.40). Dette gøres ved lineær interpolation. Lad η være enten A , u eller a :

$$\frac{\eta_1^n - \eta_S^n}{\eta_1^n - \eta_2^n} = \frac{x_1^n - x_S^n}{x_1^n - x_2^n}. \quad (4.42)$$

Isolering af η_S^n og ved at benytte (4.41) giver:

$$\begin{aligned} \eta_S^n &= \eta_1^n - \frac{x_1^n - x_S^n}{x_1^n - x_2^n} (\eta_1^n - \eta_2^n) \\ &= \eta_1^n + \frac{x_1^n - x_S^n}{\Delta x} (\eta_1^n - \eta_2^n) \frac{\Delta t}{\Delta t} \\ &= \eta_1^n + (u_S^n - a_S^n) (\eta_1^n - \eta_2^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Den lineære interpolation af a og u bliver således:

$$a_S^n = a_1^n + (a_1^n - a_2^n) (u_S^n - a_S^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.44)$$

$$u_S^n = u_1^n + (u_1^n - u_2^n) (u_S^n - a_S^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (4.45)$$

Isoleres u_S^n og a_S^n fås:

$$u_S^n = \frac{u_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_1^n u_2^n - u_1^n a_2^n)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_1^n - u_2^n) - (a_1^n - a_2^n))} \quad (4.46)$$

$$a_S^n = \frac{a_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_1^n u_2^n - u_1^n a_2^n)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_1^n - u_2^n) - (a_1^n - a_2^n))}. \quad (4.47)$$

A_S^n beregnes ved den lineære interpolation med indsættelse af a_S^n og u_S^n :

$$A_S^n = A_1^n + (A_1^n - A_2^n) (u_S^n - a_S^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (4.48)$$

Ligning (4.46), (4.47) og (4.48) samt isoleringen af A_1^{n+1} fra ligning (4.40),

$$A_1^{n+1} = A_S^n + \frac{A_S^n}{a_S^n} ((u_1^{n+1} - u_S^n) - b_S^n \Delta t), \quad (4.49)$$

giver randbetingelsen for A på venstre rand. Randbetingelsen for den højre rand fås på samme måde. Fra ODE-systemet fås følgende approksimation:

$$(A_{J+1}^{n+1} - A_T^n) + \frac{A_T^n}{a_T^n} ((u_{J+1}^{n+1} - u_T^n) - b_T^n \Delta t) = 0, \quad (4.50)$$

langs approksimationen af karakteristikken

$$(u_T^n + a_T^n) = \frac{x_{J+1}^n - x_T^n}{\Delta t}, \quad (4.51)$$

hvor $h_T^n = -\frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u_T^n}{A_T^n}$. Lineær interpolation ved den højre rand:

$$\frac{\eta_{J+1}^n - \eta_T^n}{\eta_{J+1}^n - \eta_J^n} = \frac{x_{J+1}^n - x_T^n}{x_{J+1}^n - x_J^n} \quad (4.52)$$

giver ligningerne for A , u og a i punktet T :

$$A_T^n = A_{J+1}^n - (A_{J+1}^n - A_J^n)(u_T^n + a_T^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.53)$$

$$a_T^n = a_{J+1}^n - (a_{J+1}^n - a_J^n)(u_T^n + a_T^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.54)$$

$$u_T^n = u_{J+1}^n - (u_{J+1}^n - u_J^n)(u_T^n + a_T^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (4.55)$$

Isoleres u_T^n og a_T^n i (4.54) og (4.55) fås:

$$u_T^n = \frac{u_{J+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(a_{J+1}^n u_J^n - u_{J+1}^n a_J^n)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}((u_{J+1}^n - u_J^n) + (a_{J+1}^n - a_J^n))} \quad (4.56)$$

$$a_T^n = \frac{a_{J+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(a_{J+1}^n u_J^n - u_{J+1}^n a_J^n)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}((u_{J+1}^n - u_J^n) + (a_{J+1}^n - a_J^n))}. \quad (4.57)$$

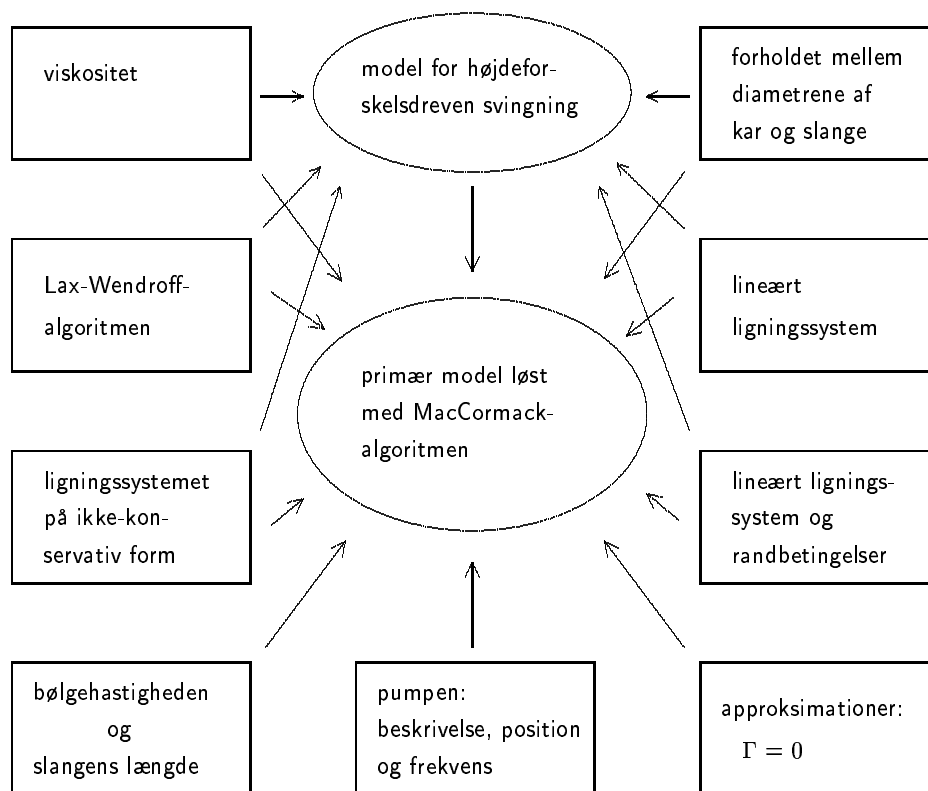
Ligning (4.53), (4.56) og (4.57) samt ligningen for A_{J+1}^{n+1} isoleret i (4.50),

$$A_{J+1}^{n+1} = A_T^n - \frac{A_T^n}{a_T^n} ((u_{J+1}^{n+1} - u_T^n) - b_T^n \Delta t), \quad (4.58)$$

giver randbetingelsen for A på højre rand. De diskretiserede ligninger kan genfindes, som de er anført ovenfor, i MatLab-programmet i bilag C.

5 Numeriske resultater

I dette kapitel præsenteres resultaterne af de numeriske undersøgelser. Den numeriske løsning af ligningerne diskuteres undervejs i præsentationen i forhold til resultater, hvor dele af den primære model er ændret (se eventuelt afsnit 3.9 hvor ligningerne i den primære model er samlet) eller hvor Lax-Wendroff-algoritmen er benyttet i stedet for MacCormack-algoritmen. I figur 5.1 er der forsøgt at give et overblik over, hvilke sammenligninger, der foretages i afsnittet.



Figur 5.1 Illustration af de sammenligninger, der foretages i dette afsnit. Øverst i midten er modellen, der beskriver den tyngdekraftsdrevne svingning (urørret) og i centrum er den primære model, som den er beskrevet i slutningen af modelafsnittet.

Først undersøges det tilfælde, hvor pumpen er deaktiveret, og hvor den eneste drivende kraft i systemet skyldes en højdeforskel mellem væsken i karrene til tiden $t = 0$. I afsnit 2.7 er dette tilfælde beskrevet ved en lineær differentialligning, som er løst for en viskøs væske i et stift urør, og for tilfældet hvor tværsnitsarealet ikke er konstant i hele

urøret er svingningsperioden bestemt for en ikke-viskøs væske som funktion af forholdet mellem diametrene. Resultaterne herfra kan til en vis grad overføres til den ikke-lineære model med deaktiveret pumpe, hvor der er en højdeforskel mellem væsken i de to kar som startbetingelse, selvom det ikke helt er det samme system som urøret, idet slangen er elastisk. Dels opnår man ved en sammenligning af de numeriske og analytiske resultater en måde, hvorpå man kan undersøge programmerne for programmeringsfejl, og dels kommer den naturlige svingning i systemet til udtryk, når pumpen aktiveres, selvom højdeforskellen er nul i begyndelsestidspunktet. Så den tyngdekraftsdrivne svingning viser sig at være en vigtig del af det pumpefænomen, der forekommer i kar-systemet.

Herefter præsenteres de numeriske undersøgelser af modellen, hvor ligningssystemet, som beskriver væskestrømningen i slangen er på konservativ form, løst med MacCormack-algoritmen, og resultaterne sammenlignes med resultaterne fra modellen med den deaktiverede pumpe. Der foretages en sammenligning med resultaterne, hvor Lax-Wendroff-algoritmen er benyttet samt en sammenligning med løsningen af ligningerne på ikke-konservativ form, hvor MacCormack-algoritmen er benyttet.

Derudover undersøges det, hvordan højdeforskellen afhænger af pumpefrekvensen, placeringen af pumpen, bølgehastigheden og længden af slangen.

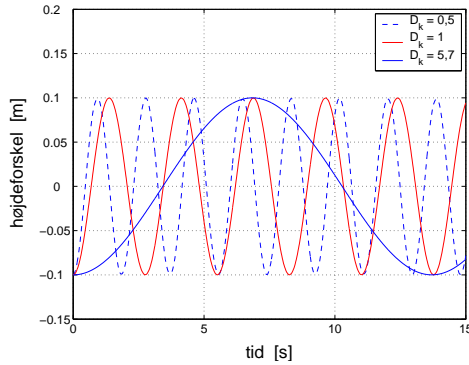
Hvis ikke andet er nævnt er følgende data benyttet for systemet: Tyngdeaccelerationen er $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ og det konstante ydre tryk er $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Densiteten og viskositeten af vand ved 20°C er henholdsvis $\rho_{vand} = 998 \text{ kg/m}^3$ og $\mu_{vand} = 0,001 \text{ kg/s m}$. Hvilediameteren af slangen og karret er givet ved $D_{rest} = 0,03 \text{ m}$ og $D_{kar} = D_k D_{rest}$, hvor D_k angiver forholdet mellem D_{kar} og D_{rest} , $D_k = 5,7$. Tykkelsen og længden af slangen er henholdsvis $s = 0,004 \text{ m}$ og $l_0 = 1,8 \text{ m}$. For en slange med de ovennævnte mål er Youngs modul tidligere målt til $E = 4,033 \cdot 10^6 \text{ kg/m s}^2$ [Normann & Poulsen, 2004].

Tabskonstanten, ξ , for ind- og udstrømning af slangen burde sættes til $\xi = 0,5$ for indstrømning i slangen og $\xi = 1$ for udstrømning af slangen [Rouse, 1978, s. 265], men der adskilles ikke mellem de to situationer i modellen. Jeg har benyttet værdien $\xi = 0,5$ i begge situationer. Den karakteristiske hastighed er sat til $u_0 = 0,2 \text{ m/s}$, og de dimensionsløse tids- og stedsskridt i algoritmerne er $\Delta t = 0,001$ og $\Delta x = 0,6$ svarende til, at stedsdomænet $([0, l_0/r_{rest}])$ er inddelt i $J = 200$ intervaller. Omregnes tids- og stedsskridt til dimensionelle størrelser er $\Delta t = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ og $\Delta x = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Når pumpen er aktiveret er den typisk placeret med centrum i $0,3 l_0$ og pumpekonstanten er $\eta = 1,68$ svarende til at radius reduceres 10% ved maksimal sammenpresning. Væskehøjderne i karrene til tiden $t = 0$ er $h_0 = 1 \text{ m}$.

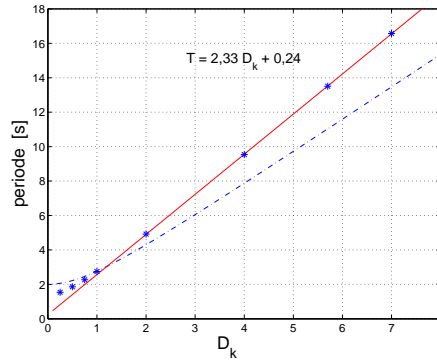
Reynolds tallet har med ovenstående data værdien $Re = \frac{998 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,015 \text{ m}}{0,001 \text{ kg/s m}} \approx 3000$. Strømningen i et eksperiment udført med disse data og hvor strømningen ikke er pulserende ville således ligge over den kritiske værdi og turbulens ville kunne forekomme. Men strømningen er pulserende, og for den mindste frekvens, der benyttes i de numeriske undersøgelser ($\nu = 0,5 \text{ Hz}$), vil strømningen kunne antages at være laminar, idet Womersley tallet er:

$$\alpha = r \sqrt{\frac{2\pi\nu\rho}{\mu}} = 0,015 \text{ m} \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,5 \text{ Hz} \cdot 998 \text{ kg/m}^3}{0,001 \text{ kg/s m}}} \approx 26,5 \quad (5.1)$$

hvorved $Re_{kritisk} = 250 \cdot \alpha \approx 6600$ og Reynolds tallet for strømningen er derfor mindre end den kritiske værdi.



Figur 5.2 Kar-systemet med tyngdekraftsdrivne svingning for tre forskellige værdier af D_k .



Figur 5.3 Svingningsperioden T plottet som funktion af D_k . Der er en tydelig lineær sammenhæng for $D_k > 1$, mens kurven bøjer af for værdier af $D_k \leq 1$. Ligningen for den fittede linie (fuldt optrukket) er indsat samt grafen (stiplet linie) for den teoretisk bestemte sammenhæng, ligning (2.42), der for $D_k \gg 1$ har hældningen $2\pi\sqrt{\frac{l_0}{2g}} = 1,9 \text{ s}$.

5.1 Den tyngdekraftsdrivne svingning

I dette afsnit præsenteres og diskuteres de numeriske data i det tilfælde, hvor pumpen er frakoblet og startbetingelserne er sat, således at væskehøjderne i det højre og venstre kar er henholdsvis $h_R(t=0) = 0,95 \cdot h_0$ og $h_L(t=0) = 1,05 \cdot h_0$ og trykket i slangen svarer til det hydrostatiske tryk ved en væskehøjde på h_0 . Der er således ikke ligevægt i systemet, og væsken i venstre kar vil derfor begynde at flyde ind i slangen, mens væsken i den anden ende af slangen vil begynde at flyde ind i højre kar. Bortset fra at slangen er elastisk, er der her tale om en model for svingningen af væske i et urør.

Længden af den totale 'væskesøjle', det vil sige summen af væskehøjderne og længden af slangen, er $l_{total} = 0,9 \text{ m} + 1,1 \text{ m} + 1,8 \text{ m} = 3,8 \text{ m}$. Hvis karrene i kar-systemet i stedet var forbundet med et stift rør med samme diameter som karrene og væsken antages at være ikke-viskøs, ville der, ifølge ligning (2.34) og (2.35), forekomme en egensvingning med frekvensen $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l_{total}}} = 0,36 \text{ Hz}$ og en svingningsperiode på $T = 2,78 \text{ s}$.

På figur 5.2 er graferne for tre værdier af D_k plottet. Perioden for svingningerne bestemmes ved at fitte den trigonometriske funktion:

$$g_{fit}(t) = -g_A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (5.2)$$

hvor g_A er amplituden og T er svingningsperioden, til de numeriske data. Dette giver en svingningsperiode på $2,75 \text{ Hz}$ for $D_k = 1$, hvilket er meget tæt på den beregnede svingningsperiode på $2,78 \text{ Hz}$ for urøret. Man kan derved slutte, at slangens elasticitet – ved de hastigheder, der forekommer i slangen, når tværsnitsarealerne er ens – ikke har den store betydning for svingningsfænomenet, når pumpen er deaktiveret. Når diameteren af karrene øges, mens diameteren af slangen fastholdes, øges svingningsperioden, mens det

modsatte er tilfældet, hvis slangens diameter er mindre end kærrenes. På figur 5.3 er perioden plottet som funktion af D_k og til sammenligning er den analytiske sammenhæng, ligning (2.42), også plottet. Der er, som man kan se, ikke kvantitativ overensstemmelse mellem de numeriske og analytiske resultater, men kvalitativt er der overensstemmelse, idet de numeriske data viser en lineær sammenhæng for $D_k > 1$ og en ikke-lineær sammenhæng for $D_k < 1$. Fra den numeriske løsning fås perioden til $T = 13,5$ s for $D_k = 5, 7$, som er den værdi, jeg har benyttet i kørslerne med aktiveret pumpe.

Det er forventeligt, at der ikke er helt overensstemmelse mellem den analytisk bestemte periode for urøret og den numerisk bestemte periode for kar-systemet, idet kar-systemet er elastisk, hvilket kunne give anledning til længere svingningsperioder. Men observationen at der omtrent er overensstemmelse for $D_k = 1$, og at de numerisk bestemte perioder ligger henholdsvis under og over de analytisk bestemte perioder for D_k mindre og større end én, tyder på, at den elastiske slange ikke kan forklare uoverensstemmelsen. Der er i de analytiske udregninger for urøret ikke taget højde for energitab, når væsken skal passere de to steder, hvor tværsnitsarealet ændres. Dette kan der dog korrigeres for i modellen for kar-systemet ved at sætte tabskonstanten ξ lig nul, men en ændring af tabskonstanten viser sig at have en meget lille betydning for de numeriske resultater, så uoverensstemmelsen mellem de analytiske og numeriske data ligger heller ikke her.

Randbetingelserne er det eneste sted tværsnitsarealet af karrene og dermed D_k indgår. Randbetingelserne består af koblede ikke-lineære differentiaalligninger, som er svære at analysere, og jeg har derfor undersøgt betydningen af de led, hvori A_{kar} indgår, numerisk. I randbetingelserne for væskestrømningshastigheden, ligning (3.62) og (3.63), indgår A_{kar} to steder i hver ligning, og ved en lille ændring af A_{kar} lokalt i leddene ses der ikke en betydende ændring i perioden. En lille ændring af A_{kar} i ligningerne for den tidsafledte af væskehøjden i karrene, ligning (3.64) og (3.65), har derimod en stor betydning for perioden, så denne ligning i modellen undersøges nærmere. At hastigheden, hvorved væskehøjden ændres, er lig hastigheden af væsken ved overfladen af karret, kan der ikke stilles spørgsmålstegn ved, men diskretiseringen af ligningen giver anledning til overvejelser. I diskretiseringen blev differentialkvotienten af højden approksimeret med differenskvotienten, og hastigheden af væsken blev approksimeret med den fremskrevne værdi af hastigheden:

$$\frac{dh}{dt} \sim \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \quad \text{og} \quad u(t) \sim u^{n+1}. \quad (5.3)$$

Når Δt går mod nul, vil differenskvotienten gå mod differentialkvotienten i h^n og derfor kan man argumentere for, at $u(t)$ skal approksimeres med u^n i stedet for u^{n+1} . Denne ændring af randbetingelsen giver dog kun anledning til en lille *reducering* af perioden både for værdier af D_k over og under én. Der er således ikke noget der tyder på, at beskrivelsen af randbetingelserne er årsagen til den observerede forskel mellem den analytisk og numerisk bestemte periode for $D_k \neq 1$.

Det er således ikke muligt at finde en forklaring på uoverensstemmelsen mellem de numeriske og analytiske resultater i modelleringen eller diskretiseringen af randbetingelserne og uoverensstemmelsen forbliver derfor et mysterium.

Væskens viskositet er et mål for den indre gnidning i væsken og giver derfor anledning til en dæmpning af svingningen, som også var tilfældet i beskrivelsen af den naturlige svingning i urøret. Med de proportioner kar-systemet har, har viskositeten størst betydning for amplituden og mindre betydning for perioden, og det ses på figur 5.4 at sammenlignes

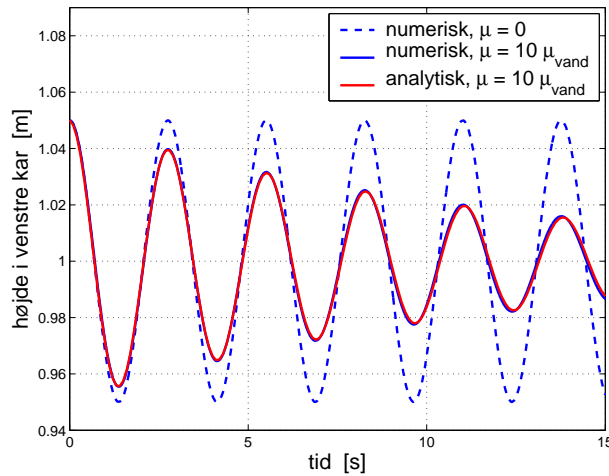
der med en væske med ti gange vands viskositet er det faktisk ikke muligt at se forskel på svingningsperioderne med og uden viskositet. Den analytiske løsning som er vist på samme figur har sin oprindelse i ligning (2.33), der angiver forskydningen af væskeoverfladen i urøret. I den opstillede model for kar-systemet tages der højde for gnidning i slangen, der forbinder karrene, men der ses bort fra gnidning i karrene. Derfor skal l_{total} i udtrykket for de viskøse kræfter, ligning (2.29), erstattes af længden af slangen, l_0 , mens l_{total} , der indgår i udtrykket for massen i ligning (2.31), er lig l_{total} i kar-systemet. Bevægelsesligningen (2.32) bliver med disse ændringer:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\pi \frac{\mu l_0}{A \rho l_{total}} \frac{dx}{dt} + \frac{2g}{l_{total}} x = 0, \quad (5.4)$$

hvor x angiver forskydningen af væskeoverfladen fra ligevægtshøjden og $A = A_{kar} = A_{rest}$. For at kunne sammenligne med de numeriske data adderes ligevægtshøjden, h_0 , til løsningen af differentiaalligningen (5.4), hvorved højden i eksempelvis det venstre kar som funktion af tiden bliver:

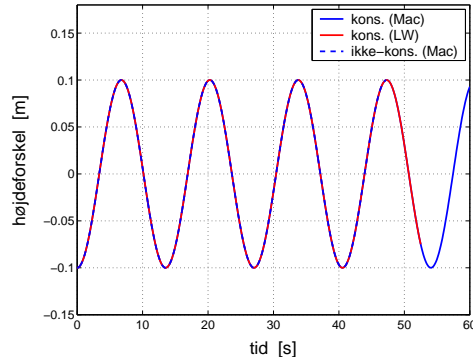
$$x(t) = h_0 + 0,05 h_0 e^{-4\pi \frac{\mu l_0}{A \rho l_{total}} t} \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{l_{total}} - \left(\frac{4\pi \mu l_0}{A \rho l_{total}} \right)^2} t \right), \quad (5.5)$$

hvor konstanten foran eksponentialfunktionen, $0,05 h_0$, angiver forskydningen af væsken i venstre kar til tiden $t = 0$ fra ligevægtspositionen.

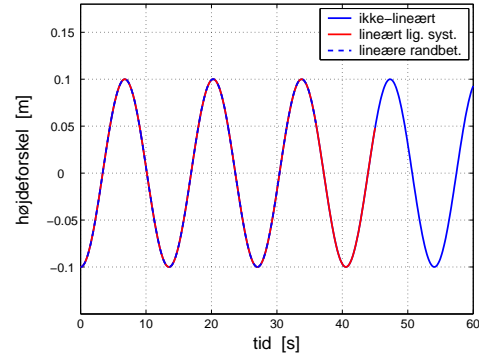


Figur 5.4 Væskehøjden i venstre kar. Pumpen er deaktiveret og $D_k = 1$. Numeriske data er vist for $\mu = 0$ og $\mu = 10 \mu_{vand}$ og grafen for den analytiske løsning, ligning (5.5), for $\mu = 10 \mu_{vand}$ er plottet til sammenligning (den er stort set sammenfaldende med de numeriske data). Det ses, at væskens viskositet, μ , har stor betydning for amplituden og ubetydelig betydning for perioden af svingningen.

Når Lax-Wendroff-algoritmen benyttes til at løse ligningssystemet på konservativ form og når MacCormack-algoritmen bruges til at løse ligningssystemet på ikke-konservativ form fås helt overensstemmende resultater, se figur 5.5.



Figur 5.5 Løsningen af det konservative og ikke-konservative ligningssystem, med henholdsvis MacCormack- og Lax-Wendroff-algoritmerne. $D_k = 5, 7$. De tre løsninger er afsluttet til forskellige tider, så det er muligt at se, at der er tale om tre forskellige løsninger.



Figur 5.6 Sammenligning af løsningerne for det ikke-lineære og lineære ligningssystem med ikke-lineære og lineære randbetingelser. $D_k = 5, 7$. MacCormack-algoritmen er benyttet i de tre tilfælde. Løsningskurverne er afsluttet til forskellige tider, så det er muligt at se, at der faktisk er tale om tre forskellige løsninger.

Selvom ligningssystemet i den primære model er ikke-lineært, er den tyngdekraftsdrivne svingning et fænomen, der kan beskrives ved en lineær differentialligning og de ikke-lineære led i ligningssystemet og i randbetingelserne burde derfor spille en meget lille rolle i løsningen. Sammenlignes løsningen, hvor ligningerne er ikke-lineære med løsningen af det lineariserede ligningssystem, se ligning (3.53), med de ikke-lineære randbetingelser, hvilket er vist i figur 5.6, er der ingen synlig forskel på graferne og det samme er tilfældet, når randbetingelserne også lineariseres.

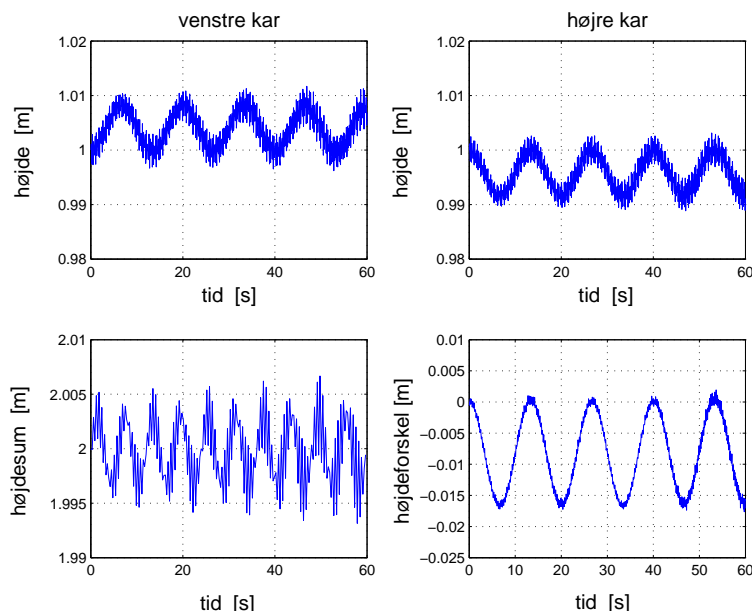
5.2 Aktivering af pumpen

Efter at have verificeret at resultaterne, i det tilfælde hvor pumpen er deaktiveret og den eneste drivkraft er tyngdekraften, er i rimelig overensstemmelse med de analytiske resultater for urøret (kvantitativt dog kun for $D_k = 1$), og at de forskellige algoritmer giver de samme resultater for det ikke-lineære ligningssystem på både konservativ og ikke-konservativ form, aktiveres pumpen og begyndelsesbetingelsen ændres, så væskehøjden i de to kar er ens ved start. Den beskrivelse af pumpen, der benyttes i det følgende, er givet ved ligning 3.59. De følgende resultater er, hvis ikke andet nævnes, løsninger af ligningerne i modellen med MacCormack-algoritmen.

For løbende at kunne kontrollere, at der er massebevarelse i systemet, hvilket ses som et mål for den numeriske stabilitet af løsningen, er summen af væskehøjderne i de to kar beregnet og massebevarelsen i systemet ses ved, at summen ligger stabilt ved $2h_0$. Slangens volumen ændres imidlertid også, men med de anvendte dimensioner af kar-systemet vil ændringer af slangens volumen være meget små i forhold til volumenændringerne i karrene som følge af ændringer i væskehøjderne, men det giver dog anledning til, at summen svinger omkring $2h_0$ i stedet for at ligge stabilt på $2h_0$.

På figur 5.7 ses resultaterne fra en kørsel med den primære model, som den er beskrevet i slutningen af modelafsnittet (afsnit 3.9), med en pumpefrekvens på $3,5 \text{ Hz}$. Det ses, at

den tidslige udvikling af forskellen mellem væskehøjderne er stabil og svinger mellem nul og ca. $-0,017\text{ m}$ med en periode på ca. 13 s , og at summen svinger omkring $2h_0 = 2\text{ m}$.



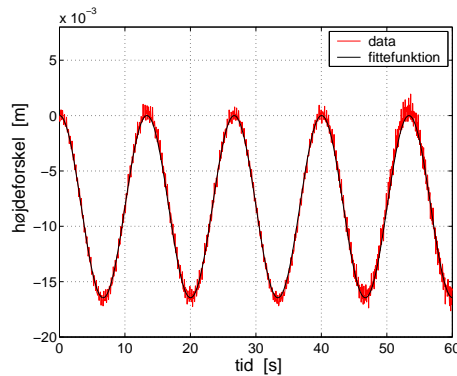
Figur 5.7 Numeriske resultater for den primære model. Øverst ses grafen for væskehøjden som funktion af tiden i henholdsvis venstre og højre kar. Nederst til venstre er summen af de to væskehøjder plottet som funktion af tiden, mens forskellen mellem væskehøjderne i karrene ses nederst til højre. Pumpefrekvensen er $3,5\text{ Hz}$.

Når viskositeten af væsken er sat til nul, er det karakteristiske ved den tidslige udvikling af højdeforskellen mellem karrene, at forskellen svinger mellem nul og en konstant værdi. Ved at fitte funktionen:

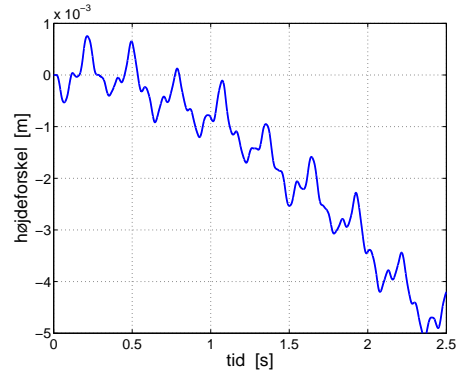
$$f_{fit}(t) = \frac{f_A}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right), \quad (5.6)$$

hvor $|f_A|$ er amplituden og T er svingningsperioden, til de numeriske data, kan amplituden og svingningsperioden bestemmes; resultatet er vist i figur 5.8. Når frekvensen eller andre parametre ændres, vil svingningens amplitude og derved middelværdi (givet ved $\frac{1}{2}f_A$) ændres, men højdeforskellen mellem karrene vil stadig svinge mellem nul og en konstant værdi (en undtagelse til denne observation er dog tilfældet, hvor højdeforskellen er nul, idet der her ses svingninger med middelværdien nul (ikke vist)).

På figur 5.9 er der zoomet ind på de første sekunder af grafen for højdeforskellen, og man kan se, at de små svingninger fra pumpen er indlejret i den store svingning og at det er dem, der giver anledning til 'støjen' på den store svingning. I svingningsmønsteret ses det, at der faktisk er tale om en superposition af to bølger med forskellig fase, nemlig de to bølger fra karrene. Betragtes højden i hvert kar som funktion af tiden (ikke vist) ses der imidlertid også her et interferensmønster. Til begyndelsestidspunktet sendes to bølger afsted fra pumpeområdet i hver deres retning. Bølgerne reflekteres ved karrene,



Figur 5.8 Fitning af grafen for højdeforskellen med fittefunktionen givet ved ligning (5.6). Amplituden og svingningsperioden er ved fitningen bestemt til henholdsvis $|f_A| = 0,0165 \text{ m}$ og $T = 13,35 \text{ s}$.



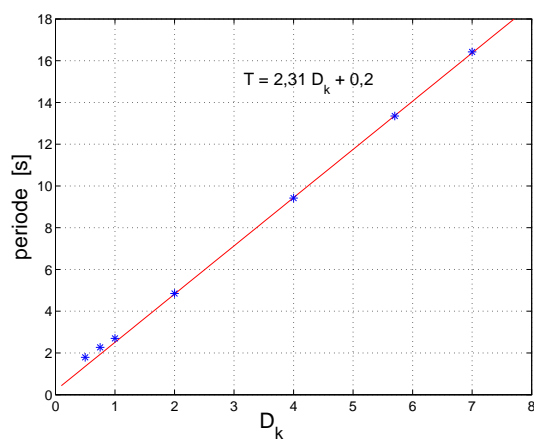
Figur 5.9 Udsnit af de første sekunder af grafen for højdeforskellen, figur 5.7 nederst til højre, hvor man kan se, at det er pumpen, som er årsag til de små svingninger, der er indlejret i svingningen med den lange periode. Pumpefrekvensen er $3,5 \text{ Hz}$.

skifter retning for på midten af slangen at mødes og interferere. De interfererede bølger fortsætter igen mod hvert kar, men forstyrres af nye bølger, der udsendes fra pumpen. Dette giver en forklaring på, hvorfor der også ses et interferensfænomenet i graferne for hvert kar.

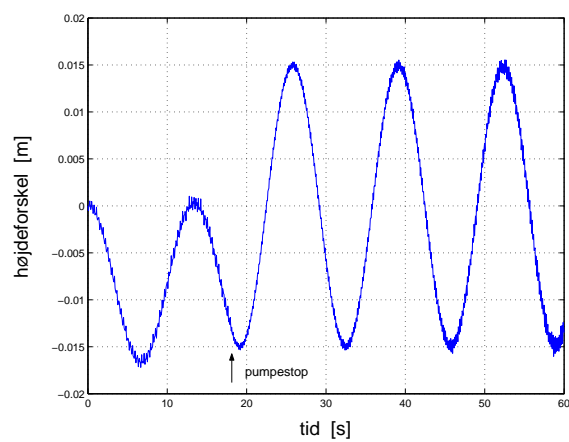
Ved at sammenligne de viste resultater med resultaterne fra den tyngdekraftsdrivne svingning med deaktiveret pumpe (urøret), får man en klar fornemmelse af, at der er en sammenhæng mellem den store svingning og systemets egensvingning. Svingningsperioden er fittet til $T = 13,35 \text{ s}$, hvilket stemmer rimelig overens med den numerisk bestemte egensvingningsperiode for $D_k = 5,7$ på $13,5 \text{ s}$.

Ved at ændre D_k kan det yderligere sandsynliggøres, at den store svingning er systemets egensvingning, idet det burde medføre en proportional ændring af perioden for $D_k > 1$. Kørsler med forskellige værdier af D_k er foretaget og svingningsperioderne som funktion af D_k er plottet på figur 5.10. For $D_k > 1$ er der en lineær sammenhæng med tilnærmelsesvis den samme hældning som ved den tyngdekraftsdrivne svingning, og igen ses en afbøjning for $D_k < 1$.

Afbrydes pumpen efter et vist tidsrum må man forvente, at grafen for højdeforskellen vil gå fra at svinge om en middelværdi, der er forskellig fra nul, til at svinge omkring nul, således som det var tilfældet ved den tyngdekraftsdrivne svingning. På figur 5.11 er pumpen afbrudt efter 18 s , og man kan se, at egensvingningen omkring nul etableres, men at de små svingninger fortsætter, selvom pumpen er afbrudt. Dette hænger sammen med, at der ikke er dæmpning i systemet, hvorved de svingninger, der allerede er etableret fortsætter udæmpet. Det ses på grafen, at amplituden af den store svingning, efter at pumpen er afbrudt, svarer til den numeriske værdi af højdeforskellen ved pumpens afbrydelse. På grund af pumpen er der således opbygget en forskel mellem væskehøjderne i karrene, som er analog til situationen, hvor højdeforskellen var placeret i begyndelsesbetingelserne. Der er således overensstemmelse mellem den numeriske løsning og de forventninger, der er til systemets opførsel.



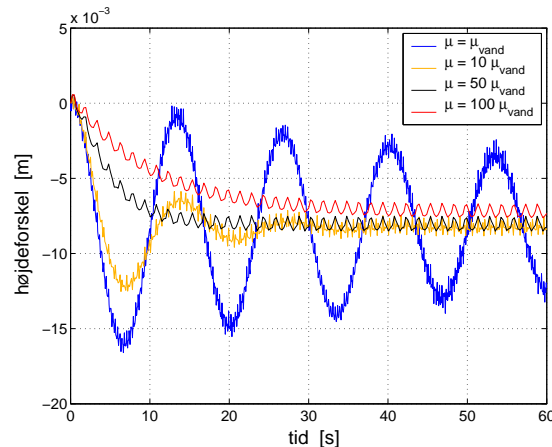
Figur 5.10 Grafen viser, at der også er en lineær sammenhæng mellem perioden af den store svingning og værdier af D_k , for $D_k > 1$, når pumpen er aktiveret. Frekvensen er $3,5 \text{ Hz}$. Ligningen for den fittede linie er indsat.



Figur 5.11 Pumpen pumper med en frekvens på $3,5 \text{ Hz}$ indtil $t = 18 \text{ s}$, hvorefter den afbrydes. Inden pumpen afbrydes er middelværdien omkring $-0,008 \text{ m}$, mens middelværdien ændres til nul efter afbrydelsen.

5.2.1 Viskositet

Herefter indføres viskositeten i modellen. På figur 5.12 ses højdeforskellen for fire forskellige værdier af viskositeten. På graferne for $\mu = 50 \mu_{vand}$ og $\mu = 100 \mu_{vand}$, ses tydeligt, at mens amplituden for egensvingningen i systemet aftager meget hurtigt ved en høj viskositet (faktisk kan egensvingningen slet ikke ses ved disse to værdier), påvirkes amplituden af svingningerne fra pumpen ikke. Hvis viskositeten ikke er for høj, ændres effektiviteten



Figur 5.12 Numeriske data for kørsler med $\mu = \mu_{vand}$, $\mu = 10 \mu_{vand}$, $\mu = 50 \mu_{vand}$ og $\mu = 100 \mu_{vand}$ med en pumpefrekvens på $3,5 \text{ Hz}$. De numeriske data med $\mu = 50 \mu_{vand}$ og $\mu = 100 \mu_{vand}$ er kun plottet for hvert fjerde datapunkt, hvilket forklarer hvorfor antallet af svingninger ikke passer med pumpefrekvensen. Det ses, at middelværdien eller ligevægtsniveauet af svingningen falder, når viskositeten stiger.

af pumpen (målt ved ligevægts- eller middelhøjdeforskellen mellem karrene) ikke i synlig grad, og viskositeten påvirker kun den tid, det tager at bygge en højdeforskel op. Når viskositeten er større, vil det tage længere tid at nå en given forskel mellem væskehøjderne i karrene, hvilket også ses på figur 5.12, hvor der i kørslen med $\mu = \mu_{vand}$ opnås en højdeforskel på $-0,008 \text{ m}$ på omkring 3 s , mens den samme højdeforskel først opnås efter ca. 18 s når $\mu = 50 \mu_{vand}$. Dette hænger sammen med, at viskositeten er et mål for dissipationen af energi i væsken; er viskositeten høj, vil en større mængde af den energi pumpen leverer til systemet gå til den indre gnidning i væsken¹, og der skal derfor pumpes i længere tid for at nå det samme resultat.

Er viskositeten meget stor, eksempelvis $\mu = 100 \mu_{vand}$ som vist i figur 5.12, påvirkes pumpens effektivitet og den opnåede højdeforskel mellem karrene bliver mindre. Er der tale om et svingningsfænomen, der kan beskrives ved en lineær differentialligning, som vist i afsnit 2.7, vil viskositeten kun dæmpe egensvingningen og ikke svingningen forårsaget af en ydre kraft. At der her ses tegn på, at viskositeten faktisk har indflydelse på effekten af den ydre kraft, tilskrives derfor de ikke-lineære træk ved systemet.

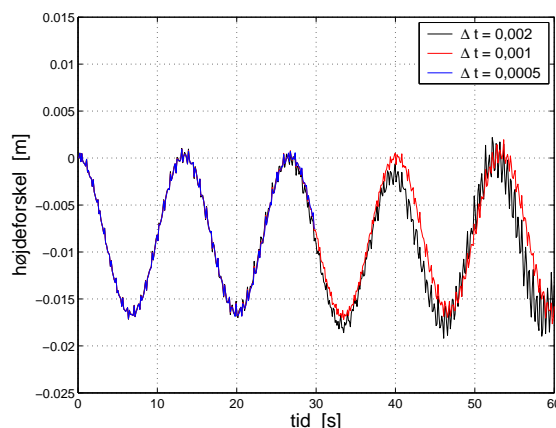
¹Dette vil medføre en temperaturstigning, hvilket ikke er beskrevet i denne model. I de komplette Navier-Stokes-ligninger indgår der udover ligninger for impuls- og massebevarelsen en energibevarelsesligning, som ville kunne beskrive dette.

5.2.2 Densitet

De numeriske data viser, at pumpens effektivitet ændres betydeligt, hvis densiteten af væsken ændres. Øges densiteten, vil den numeriske værdi af middelværdien mindskes, og omvendt hvis densiteten mindskes stiger den numeriske værdi af middelværdien. Hvis væsken betragtes som et lod, der skal løftes af pumpen, vil pumpen ved en given energitilførsel, kunne løfte loddet en given højde. Øges densiteten af væsken, svarer det til en øget masse af loddet, hvilket vil reducere den højde, som pumpen kan løfte loddet, hvis den tilførte energimængde fastholdes. Analogien kan dog ikke helt beskrive observationerne, idet der forekommer en kritisk værdi af densiteten, hvor middelværdien af højdeforskellen skifter fortegn. En nærmere undersøgelse af dette fænomen foretages i forbindelse med, at betydningen af bølgehastigheden undersøges.

5.2.3 Stabilitetsundersøgelse

I ovenstående kørsler er tidsskridtet sat til $\Delta t = 0,001$, fordi CFL-betingelsen (4.12) herved er opfyldt ved en inddeling af stedsdomænet i 200 intervaller. På figur 5.13 er tre kørsler med forskellige værdier af Δt plottet. Når Δt øges er det tydeligt at se, at løsningen bliver mere ustabil og ved en værdi på $\Delta t = 0,004$ sker der en overtrædelse af CFL-betingelsen i kørslen. En mindskelse af Δt ændrer ikke på den numeriske løsning, idet Δh -middelværdien ved kørslerne med $\Delta t = 0,001$ og $\Delta t = 0,0005$ begge giver $\Delta h = -8,2 \cdot 10^{-3} m$. En mindskelse af Δx samtidig med at Δt reduceres, således at



Figur 5.13 Figuren viser tre kørsler med frekvensen $3,5 Hz$ og forskellige værdier af Δt . Kørslen med $\Delta t = 0,0005$ er afsluttet ved $30 s$, således at det er muligt at skelne denne kørsel fra kørslen med $\Delta t = 0,001$. Ved $\Delta t = 0,002$ er det tydeligt, at løsningen begynder at blive ustabil efter $30 s$.

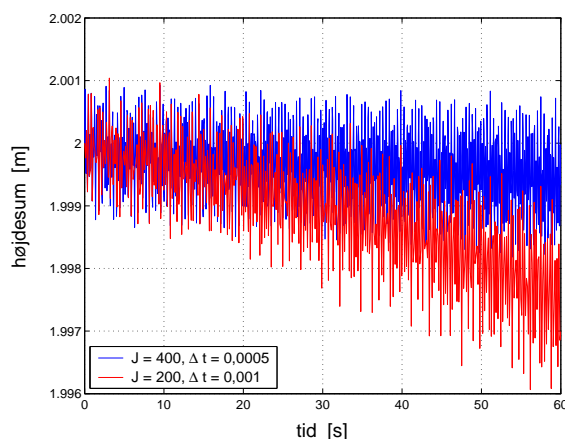
forholdet mellem dem forbliver det samme, har en betydning omend lille for størrelsen af middelværdien ved en pumpefrekvens på henholdsvis $3,5 Hz$ og $6,5 Hz$. I tabel 5.1 er værdierne for Δt og J og den tilhørende middelværdi angivet for de to frekvenser.

Da middelværdien når en konstant værdi ved yderligere forøgelse/mindskelse af J og Δt tyder det på, at løsningen konvergerer for Δx og Δt gående mod nul, og at fejlen ved at

Δt	J	Δh -middelværdi $\nu = 3,5 \text{ Hz}$	Δh -middelværdi $\nu = 6,5 \text{ Hz}$
$1 \cdot 10^{-3}$	200	$-8,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$5 \cdot 10^{-4}$	400	$-8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,14 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$2,5 \cdot 10^{-4}$	800	$-8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$1,25 \cdot 10^{-4}$	1600	$-8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Tabel 5.1 Tabel over middelværdien af højdeforskellen ved forskellige værdier af Δt og J ved en pumpefrekvens på $3,5 \text{ Hz}$ og $6,5 \text{ Hz}$.

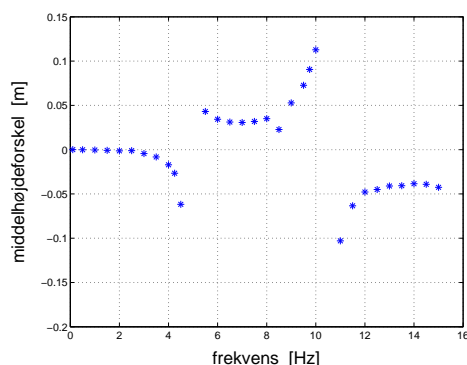
inddele stedsdomænet i 200 intervaller og bruge tidsintervallet på $0,001$ ligger omkring 1% . Ved en frekvens på $6,5 \text{ Hz}$ konvergerer middelværdien langsommere end ved $3,5 \text{ Hz}$ og man kan derfor frygte, at afvigelsen sandsynligvis vil vokse med frekvensen og at der er risiko for, at stabiliteten af løsningen ved højere frekvenser kræver en finere diskretisering af steds- og tidsdomænet. Denne formodning underbygges ved at betragte summen af væskehøjderne i de to kar, idet der ved en diskretisering på $J = 200$ og $\Delta t = 0,001$ er tendens til, at summen af højderne ved frekvenser over 10 Hz falder med tiden, det vil sige at der ikke er massebevarelse i systemet, se figur 5.14. Årsagen til at summen



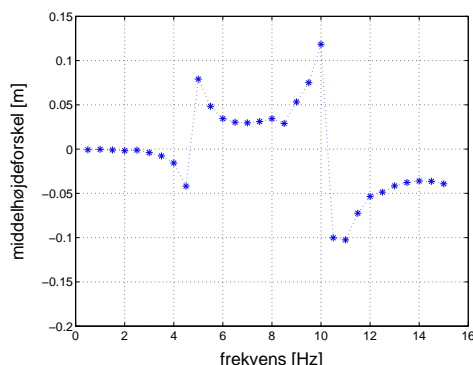
Figur 5.14 Summen af væskehøjderne i de to kar. Frekvensen er 14 Hz og $\mu = 0$. Grafen for højdeforskellen (ikke vist) svinger for begge diskretiseringer stabilt mellem 0 Hz og $-0,08 \text{ Hz}$, se eventuelt figur 5.29.

af væskehøjderne i karrene falder, mens højdeforskellen svinger stabilt, er at begge kar ‘taber’ væske i samme fart, hvorved ustabiliteten i den numeriske løsning således kan ses på graferne over højden for de to kar og på summen af højderne, men meget lidt på højdeforskellen og det giver sig kun til udtryk som en usikkerhed på middelhøjdeforskellen.

Valget af Δx og Δt værdierne er et spørgsmål om regnetid i forhold til en større præcision på middelværdien af højdeforskellen. For kortere kørsler (under 60 sekunder) og for mindre frekvenser (under 10 Hz) er det kun de absolutte værdier af middelværdien, der påvirkes, idet de kvalitative detaljer ikke mistes ved at vælge relativt høje værdier



Figur 5.15 De fittede Δh -middelværdier plottet mod frekvensen. Viskositeten er $\mu = 0$. Ved frekvenserne $\nu = 5 \text{ Hz}$ og $\nu = 10,5 \text{ Hz}$ har det ikke været muligt at bestemme en middelværdi. Bemærk afvigelsen ved $\nu = 8,5 \text{ Hz}$.



Figur 5.16 De fittede Δh -middelværdier plottet mod frekvensen. Viskositeten er $\mu = 50 \mu_{vand}$. Som på figur 5.15 ses der igen en afvigelse ved $8,5 \text{ Hz}$.

af Δx og Δt og der er stadig massebevarelse. Ved længerevarende kørsler eller ved højere frekvenser akkumulerer de numeriske fejl og det er i dette tilfælde nødvendigt med mindre værdier af Δx og Δt . Skal de numeriske løsninger sammenlignes med meget præcise eksperimentelle data eller skal graferne for højden i de enkelte kar bruges, kan det naturligtvis også være nødvendigt med en større numerisk præcision.

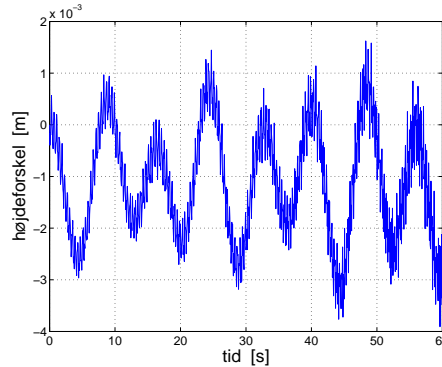
På grund af akkumuleringen af numeriske fejl ved høje frekvensværdier undersøges modellen i det følgende kun for frekvenser mindre end 15 Hz .

5.2.4 Frekvensafhængigheden

Frekvensafhængigheden af pumpens effektivitet, udtrykt ved middelhøjdeforskellen mellem karrene, er undersøgt i intervaller af $0,5 \text{ Hz}$ i frekvensområdet $0,5 - 15 \text{ Hz}$ (frekvenserne $0,1 \text{ Hz}$, $4,25 \text{ Hz}$ og $9,75 \text{ Hz}$ er medtaget som supplementspunkter). For hver kørsel i 30 sekunder ved en given frekvens er middelværdien af svingningen, givet ved $\frac{1}{2} f_A$, bestemt ved fitning med funktionen (5.6). På figur 5.15 er de fittede Δh -middelværdier plottet som funktion af frekvensen.

Det ses på dette frekvensscan, at middelhøjdeforskellen skifter fortegn to gange, og ved hvert skift, det vil sige ved frekvenserne 5 Hz og $10,5 \text{ Hz}$ har det ikke været muligt at bestemme en middelværdi for højdeforskellen, fordi højdeforskellen divergerer og radius af slangen bliver negativ i disse kørsler. Sammenholdes dette med datapunktens værdier omkring disse punkter, kunne det tyde på, at løsningen ved de pågældende frekvenser divergerer; et tegn på at der kunne være tale om resonansfrekvenser, det vil sige at der er sammenfald mellem pumpens frekvens og systemets egenfrekvenser.

Ved frekvensen $8,5 \text{ Hz}$ ses en tydelig afvigelse, og ved frekvenserne $2,5 \text{ Hz}$, $4,5 \text{ Hz}$ og $5,5 \text{ Hz}$ er der også registreret uregelmæssigheder i graferne for højdeforskellen som funktion af tiden. Uregelmæssighederne giver sig til udtryk i, at graferne ikke svinger stabilt mellem nul og en konstant værdi, og at den midlede højdeforskel derfor ikke er konstant. Et eksempel på dette ses på figur 5.17.



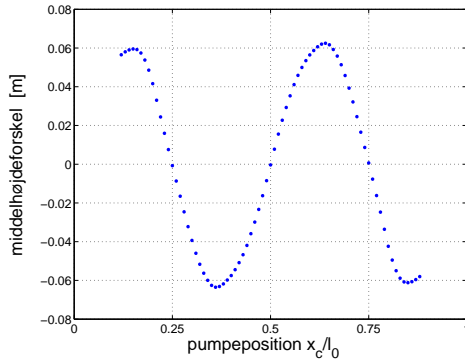
Figur 5.17 Højdeforskellen som funktion af tiden ved en frekvens på $2,5 \text{ Hz}$. Det ses, at højdeforskellen ikke svinger stabilt mellem nul og en fast værdi.

På figur 5.16 ses et tilsvarende frekvensscan, men nu er viskositeten af væsken sat til $50 \mu_{vand}$. Ved de frekvensværdier (5 Hz og $10,5 \text{ Hz}$), hvor det med en viskositet på nul var umuligt at bestemme en middelværdi for højdeforskellen, er det nu muligt at bestemme en værdi, idet højdeforskellen ikke længere divergerer, hvilket underbygger hypotesen om, at der er tale om resonanspunkter. I det følgende bruger jeg ordet resonanspunkter eller -frekvenser for de frekvensværdier, hvor middelhøjdeforskellen har forskelligt fortegn på hver side, samtidig med at højdeforskellen divergerer (eller har tendens til det, når væsken er viskøs) i selve punktet.

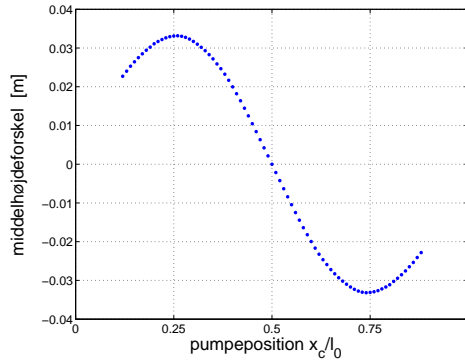
5.2.5 Positionsafhængigheden

For at undersøge hvordan effektiviteten af pumpen afhænger af pumpens placering på slangen, fastholdes pumpefrekvensen, mens positionen af pumpen varieres. I undersøgelsen har jeg valgt at benytte frekvensen $14,84 \text{ Hz}$ og årsagen til denne specielle frekvensværdi vil blive forklaret i afsnit 5.2.6. Lad centrum af pumpen være givet ved $x_c = \frac{x_A + x_B}{2}$; det mulige domæne for x_c vil, på grund af at pumpeområdet har en halvbredde på $0,1 l_0$, være givet ved $]0,1 l_0 ; 0,9 l_0[$, hvor l_0 er længden af slangen. På samme måde som frekvensscannet blev konstrueret, er Δh -middelværdierne for hvert sæt af data tilhørende en x_c -værdi fittet ud fra funktionen (5.6), kørslerne er udført med $\mu = 0$. Resultatet ses på figur 5.18. Det er tydeligt at se, at der er en periodisk sammenhæng mellem pumpens effektivitet og placeringen af pumpen, og at der er symmetri omkring midten af slangen, hvilket er forventeligt. Placeres pumpen i centrum af slangen vil højdeforskellen mellem karrene være nul, hvilket er helt i overensstemmelse med det forventelige, idet det er umuligt at forestille sig, at et helt symmetrisk system skulle kunne have asymmetriske egenskaber. Men lidt overraskende er det måske, at der forekommer to andre positioner, hvor højdeforskellen også bliver nul, nemlig $x_c/l_0 = 0,25$ og $x_c/l_0 = 0,75$. Halveres frekvensen imidlertid, så $\nu = 7,42 \text{ Hz}$, reduceres svingningsperioden og det er således kun, når pumpen placeres i centrum af slangen, at højdeforskellen bliver nul, se figur 5.19.

Med hvordan foregår overgangen fra figur 5.18 til figur 5.19? På figur 5.20 ses positions-scan for seks forskellige frekvenser mellem $14,84 \text{ Hz}$ og $7,42 \text{ Hz}$, således at det er muligt

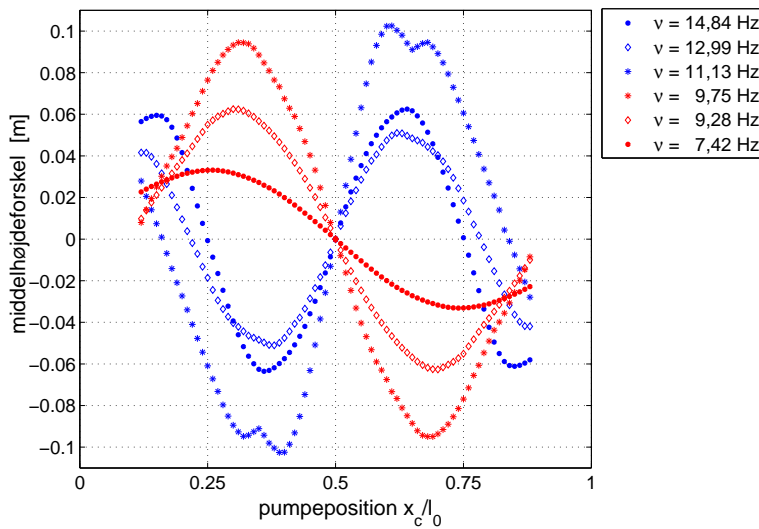


Figur 5.18 Middelhøjdeforskellen plottet mod pumpepositionen, x_c/l_0 , ved fastholdt frekvens, $\nu = 14,84 \text{ Hz}$. Intervallet mellem hver kørsel er $0,01 l_0$.



Figur 5.19 Middelhøjdeforskellen plottet mod pumpepositionen, x_c/l_0 , ved fastholdt frekvens, $\nu = 7,42 \text{ Hz}$. Intervallet mellem hver kørsel er $0,01 l_0$.

at danne sig et overblik over overgangen.



Figur 5.20 Positionsscan for udvalgte frekvenser i intervallet $7,42 - 14,84 \text{ Hz}$. Frekvenserne $9,28 \text{ Hz}$, $11,13 \text{ Hz}$ og $12,99 \text{ Hz}$ er ligeligt fordelt i intervallet, mens $9,75 \text{ Hz}$ ligger midt i intervallet $9,28 - 11,13 \text{ Hz}$.

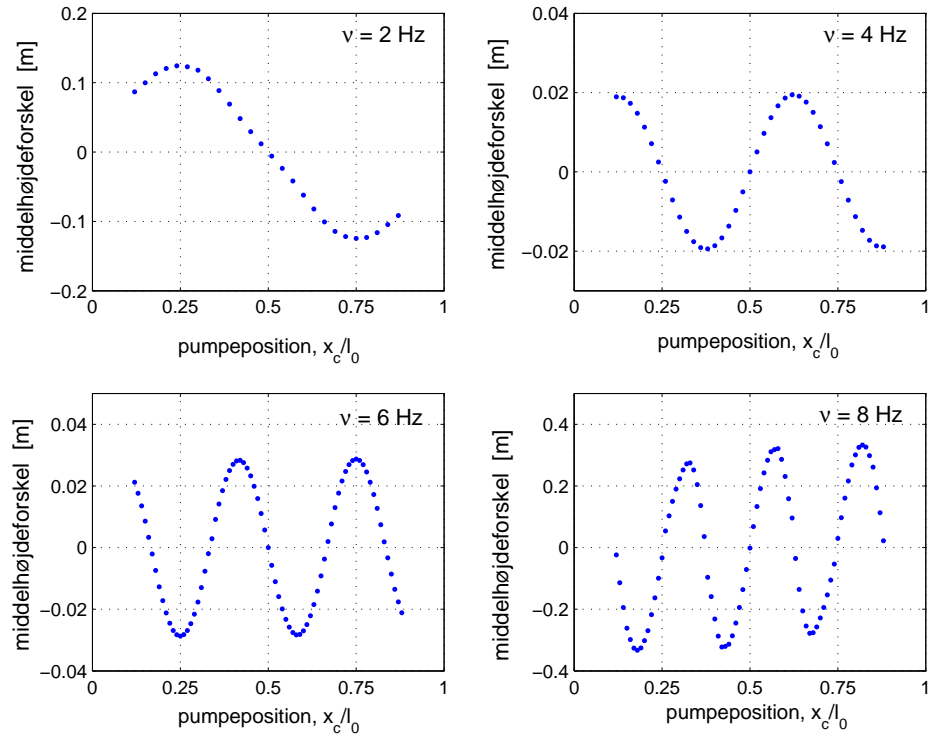
Når frekvensen øges fra $7,42 \text{ Hz}$ vokser middelhøjdeforskellen men forbliver positiv, når pumpen er placeret til venstre for midten og negativ, når pumpen er placeret til højre for midten. Mellem frekvenserne $9,75 \text{ Hz}$ og $11,13 \text{ Hz}$ skifter middelhøjdeforskellen fortegn, således at højdeforskellen nu er negativ, når pumpen er placeret på den venstre del af slangen og positiv på den højre side. Det er ikke muligt at undersøge dette skift nærmere idet højdeforskellen divergerer, hvilket udviklingen i de viste positionsscan også antyder. Dette er i overensstemmelse med frekvensscannene, hvor der blev fundet et resonanspunkt omkring $10,5 \text{ Hz}$.

5.2.6 Sammenhængen mellem frekvens- og positionsafhængigheden

Når pumpen pumper med en frekvens ν_0 , sendes der bølger ud i hver del af slangen. Bølgeudbredelseshastigheden, c_0 , i slangen er, hvis det antages at væsken er i hvile og at tværsnitsarealet er lig tværsnitsarealet til tiden $t = 0$, givet ved:

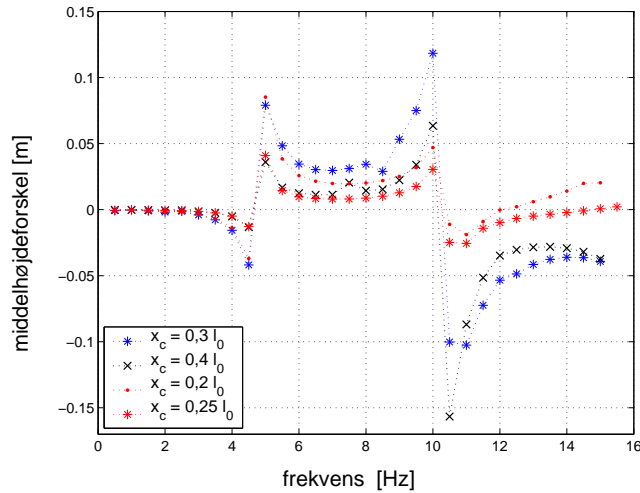
$$c_0 = c(A=A_{start}, u=0) = a_0 \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}} = 26,71 \text{ m/s}. \quad (5.7)$$

En bølge med frekvensen ν_0 og hastigheden c_0 vil have en bølgelængde λ_0 , givet ved $\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu_0}$. Skal bølgelængden af bølgen forårsaget af pumpen svare til længden af slangen, skal pumpefrekvensen være $\nu_0 = c_0/l_0 = 26,71 \text{ m/s}/1,8 \text{ m} = 14,84 \text{ Hz}$, hvilket netop er den ene frekvens, der blev benyttet til at undersøge positionsafhængigheden ovenfor. Den anden frekvens, der blev benyttet, $\nu = 7,42 \text{ Hz}$, giver en bølgelængde, der er dobbelt så lang som slangen. Da det ikke er muligt at afprøve en frekvens på $2 \cdot 14,84 \text{ Hz}$, fordi de numeriske løsninger er ustabile ved så høje frekvenser, har jeg i stedet valgt en anden længde af slangen, som svarer til bølgelængden ved en pumpefrekvens på 4 Hz , nemlig $l_0 = 6,68 \text{ m}$. Resultaterne for kørsler med frekvenserne $\nu = 2, 4, 6, 8 \text{ Hz}$ ses på figur 5.21.



Figur 5.21 Undersøgelse af positionsafhængigheden ved forskellige frekvenser. Viskositeten er sat til nul. Frekvensen $\nu = 4 \text{ Hz}$ giver en bølgelængde svarende til slangens længde på $l_0 = 6,68 \text{ m}$. Pumpeområdets bredde er $0,36 \text{ m}$ svarende til bredden af pumpeområdet, når slangen er $1,8 \text{ m}$.

Der ses igen en stor grad af periodicitet i positionsafhængigheden, hvor resultaterne



Figur 5.22 Frekvensscan ved forskellige pumpepositioner. Ved $x_c = 0,25 l_0$ ses et fortegnsskift i middelhøjdeforskellen uden tegn på divergens i løsningen. Der ses ingen forskel i placeringen af resonanspunkter ved de forskellige pumpepositioner, men placeringen af pumpen har en betydning for, hvor nulpunkterne er placeret.

for $\nu = 2$ og $\nu = 4$ er i overensstemmelse med undersøgelserne, hvor slangens længde var $1,8 m$ og frekvenserne $\nu = 7,42 Hz$ og $\nu = 14,84 Hz$. Værdien af højdeforskellen mellem karrene ændres periodisk med positionen og længden af perioden afhænger af pumpefrekvensen. Ved en frekvens svarende til en bølglængde lig slangens længde er perioden halvdelen af slangens længde. Halveres frekvensen, fordobles længden af perioden ($\nu = 2 Hz$) og modsat, hvis frekvensen fordobles, halveres perioden ($\nu = 8 Hz$). Alle graferne er, som forventet, symmetriske omkring $x_c = 0,5 l_0$ (med skift af fortegn) og derudover synes graferne at konvergere mod nul for x_c gående mod slangens randpunkter, hvilket er overraskende fordi man forventer, at pumpeeffekten vil vokse jo tættere pumpen placeres på en af enderne af slangen.

Frekvensen, hvor grafen for middelhøjdeforskellen divergerer, se figur 5.15, afhænger ikke af placeringen af pumpen. Pumpes der med den samme frekvens forskellige steder på slangen, ændres middelværdien af højdeforskellen, men frekvensen for resonanspunktet, og derved frekvensen, hvor fortegnet for middelhøjdeforskellen skifter, ændres ikke. Sammenlignes frekvensscannet og positionsscannet bliver det klart, at det dog ikke kan være en regel, at et skift i fortegnet for middelhøjdeforskellen altid forekommer i forbindelse med et resonanspunkt. Positionsscannene viser nemlig, at der eksisterer kombinationer af frekvensen og pumpepositionen, således at middelhøjdeforskellen faktisk bliver nul, også når viskositeten er nul. Disse frekvenser henvises til som nulpunkter.

I figur 5.22 ses et frekvensscan, hvor pumpen er placeret i $x_c = 0,25 l_0$ og hvor længden af slangen er $l_0 = 1,8 m$. Som forventet fra positionsscannene bliver højdeforskellen nul ved en frekvens på $\nu = 14,84 Hz$ med et skift i fortegnet for middelværdien til følge. Ligeledes ses det, at resonansfrekvenserne tilsyneladende ikke afhænger af placeringen af pumpen, og ved at foretage frekvensscan for yderligere to positioner, underbygges denne observation, se igen figur 5.22.

5.2.7 Det transmural tryk i slangen

I håb om, at det er muligt at finde en forklaring på, hvorfor højdeforskellen ved nogle frekvenser er positiv, mens ved andre frekvenser er negativ, og hvorfor forskellen ved særlige kombinationer af frekvensen og pumpepositionen bliver nul, har jeg undersøgt det transmural tryk i slangen. Hypotesen er, at pumpefænomenerne hænger sammen med, at der er en forskel på længden af de to stykker mellem pumpen og de to kar, idet der ikke observeres en pumpeeffekt, når pumpen placeres i midten af slangen. Pumpefrekvensen svarer til en bølgelængde og hvis bølgelængden passer med længderne af de to stykker på en sådan måde, at der ved det ene kar bliver en bug mens der ved den anden bliver en knude, kunne man forestille sig, at pumpeeffektens frekvensafhængighed kunne forklares ved dette.

På figur 5.23 ses det transmural tryk i slangen som funktion af stedet ved fire forskellige kombinationer af frekvens og pumpeposition. Viskositeten af væsken er sat til $50 \mu_{\text{vand}}$ for at dæmpe egensvingningen, der giver anledning til meget "støj" i systemet.

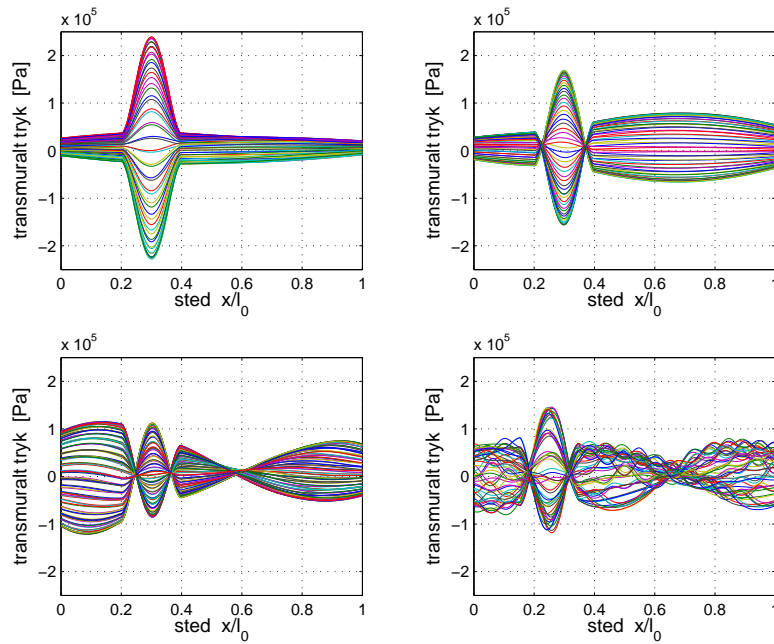
De to øverste grafer svarer til negativ (venstre graf) og positiv (højre graf) middelhøjdeforskel, det vil sige at væsken pumpes henholdsvis mod det venstre og højre kar. Nederst til venstre er middelhøjdeforskellen negativ og væske pumpes mod det venstre kar, mens middelhøjdeforskellen er nul ved den nederste højre graf. Den tendens, der ses på graferne er, at trykket har størst udsving ved det kar, hvor væsken ophobes, og at jo større middelhøjdeforskellen er desto større er trykudsvinget. Når middelhøjdeforskellen er nul og der derfor ikke ophobes væske i nogle af karrene, er det transmural tryk ens ved de to kar (graf nederst til højre).

Den formodede hypotese – at væskestrømningens retning hænger sammen med forekomsten af bug og knude ved randene – synes således ikke at kunne underbygges. Hypotesen bygger på, at bredden af pumpeområdet har en betydning for retningen af væskestrømningen og dermed middelhøjdeforskellen i karrene, men udførte undersøgelser (ikke vist), hvor bredden af pumpeområdet varieres, tyder ikke på, at der er en sådan sammenhæng. Det er derfor kun værdien af x_c og ikke bredden, der har en effekt på nulpunkterne og dermed på strømningsretningen og højdeforskellen.

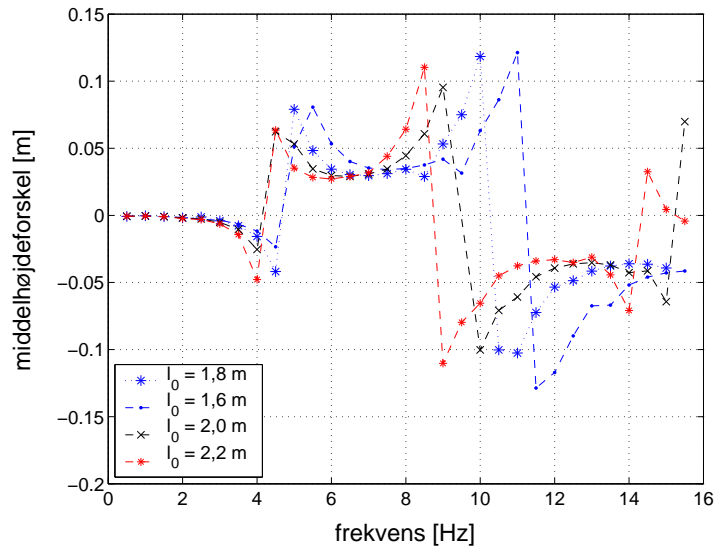
5.2.8 Længden af slangen

Længden af slangen har en afgørende betydning for den naturlige svingning i kar-systemet og det er derfor forventeligt, at der ved en ændring af slangens længde også vil kunne observeres en ændring i middelhøjdeforskellens frekvensafhængighed. På figur 5.24 ses frekvensscan for fire forskellige slangelængder, og der ses en forskydning af resonanspunkterne, således at en længere slange medfører lavere resonansfrekvenser. Ved hvert frekvensscan er bredden af pumpeområdet $0,2 l_0$. Ved at foretage frekvensscan med frekvensintervaller på $0,1 \text{ Hz}$ i frekvensområderne $4-5,5 \text{ Hz}$ og $8,5-11,5 \text{ Hz}$ er det muligt at bestemme begge resonansfrekvenser for hver af de fire slangelængder mere præcist. Plottes resonansfrekvenserne, både frekvenserne ved det første og andet resonanspunkt, som funktion af slangens længde bliver det klart, at der er tale om sammenhænge, der kan beskrives ved potenslove, se figur 5.25, og at sammenhængene ikke er ens for de to resonanspunkter.

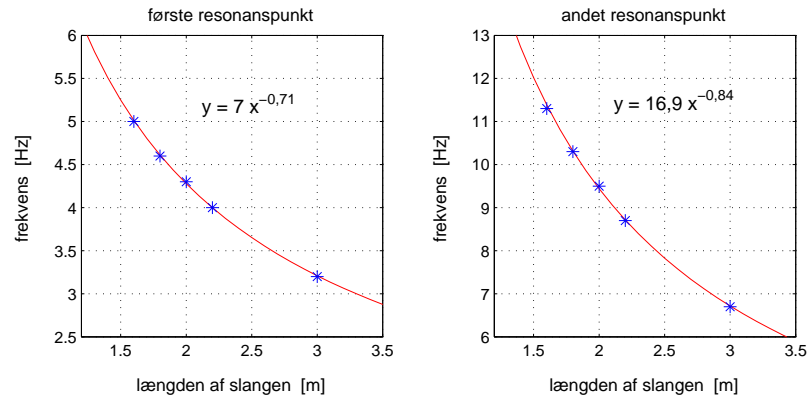
Niveauet for middelhøjdeforskellen ændres stort set ikke ved en ændring af slangelængden, eksempelvis ligger middelhøjdeforskellene mellem de to første resonanspunkter alle



Figur 5.23 Familier af kurver, der viser det transmurale tryk i slangen i løbet af en pumpeperiode ved fire forskellige kombinationer af pumpeposition og frekvens. De enkelte kurver på graferne angiver værdien af det transmurale tryk over slangens længde til et fast tidspunkt. Viskositeten er sat til $50 \mu_{vand}$. Øverst til venstre: $x_c = 0,3 l_0$ og $\nu = 3,5 Hz$. Øverst til højre: $x_c = 0,3 l_0$ og $\nu = 6,5 Hz$. Nederst til venstre: $x_c = 0,3 l_0$ og $\nu = 12,4 Hz$. Denne frekvensværdi svarer til en bølgelængde, der er dobbelt så lang som stykket fra højre side af pumpeområdet og til højre rand ($\lambda = 2,16 m$), således at bølgelængden *ikke* svarer til et helt multiplum af stykket mellem venstre side af pumpeområdet til venstre rand. Nederst til højre: $x_c = 0,25 l_0$ og $\nu = 14,8 Hz$. Bemærk at alle kurverne svinger omkring en værdi lidt over $0 Pa$, hvilket stemmer overens med, at det transmurale tryk er forskelligt fra nul, når systemet er i hvile på grund af det hydrostatiske tryk fra væsken i karrene.



Figur 5.24 Frekvensscan ved varierende slangelængder. Viskositeten er sat til $\mu = \mu_{vand}$. Sammenlignes positionerne af det andet resonanspunkt, ser der ud til at være en lineær sammenhæng mellem positionen og længden af slangen. Bemærk, at der på frekvensscannene for $l_0 = 2,2\text{ m}$ og $l_0 = 2,0\text{ m}$ ses et tredje resonanspunkt omkring $14 - 15\text{ Hz}$.



Figur 5.25 Resonansfrekvensen plottet som funktion af slangens længde for det første og andet resonanspunkt for fem forskellige slangelængder: $l_0 = 1,6\text{ m}, 1,8\text{ m}, 2,0\text{ m}, 2,2\text{ m}, 3\text{ m}$. Viskositeten er $\mu = \mu_{vand}$. Slangelængden på 3 m er taget med for bedre at kunne fitte et udtryk til de numeriske data, idet det blev klart at der ikke var tale om lineære sammenhænge. De fittede udtryk er indsat.

omkring $0,03\text{ m}$. At niveauet er ens er forventeligt, idet parametre for pumpen, såsom pumpeområdet bredde og det maksimale ydre tryk, pumpen giver, ikke ændres, hvilket er parametre, der har betydning for effekten af pumpen.

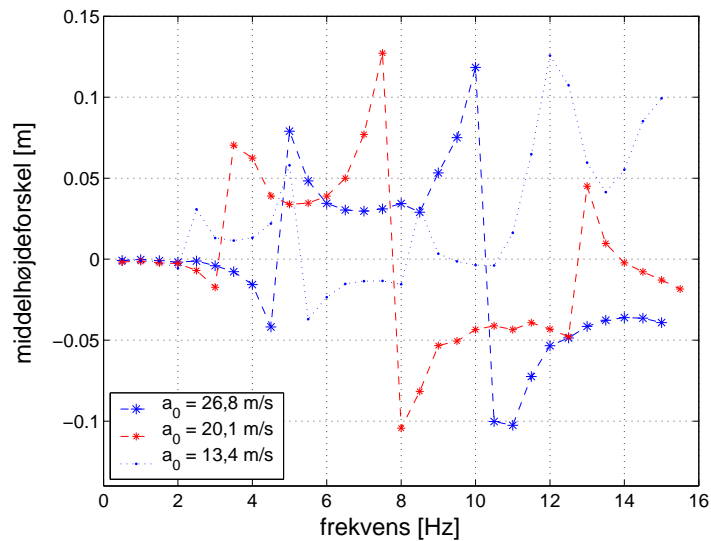
5.2.9 Bølgehastigheden

Bølgehastigheden i slangen er i ligning 5.7 angivet for det tilfælde, hvor væskestrømningen er nul og arealet er lig A_{start} . Udskrives a_0 fås:

$$c_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{s E}{\rho D_{rest}}} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_{start}}}. \quad (5.8)$$

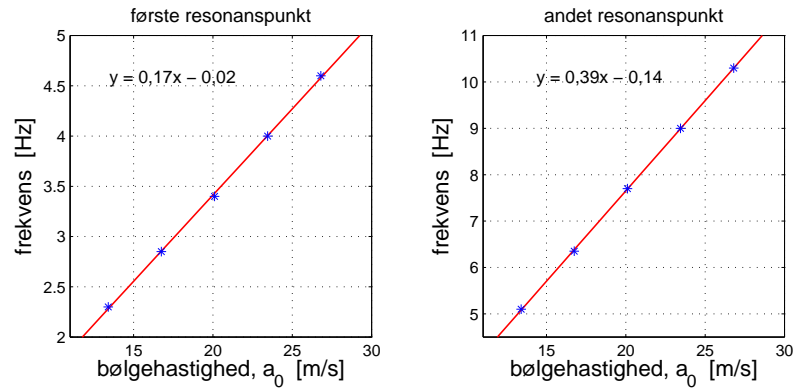
Det eneste sted slangevæggens tykkelse, s , slangens Young modul og densiteten, ρ , indgår er i konstanten a_0 (når det antages at viskositeten er nul, idet densiteten også indgår i Reynolds tal). En ændring af densiteten, på samme vis som før, hvor de to andre konstanter fastholdes, vil derfor give det samme resultat, som hvis densiteten fastholdes og s eller E ændres. Diameteren af slangen indgår mange andre steder i modellens ligninger, så den holdes udenfor overvejelserne i første omgang.

På figur 5.26 er der vist tre kørsler med forskellige værdier af konstanten a_0 i bølgehastigheden. Det er tydeligt, at bølgehastigheden har en betydelig effekt på fænomenet. Faktisk



Figur 5.26 Tre frekvensscan med forskellige værdier af bølgehastighedskonstanten a_0 . I frekvensscannet for $a_0 = 13,4\text{ m/s}$ skifter middelhøjdeforskellen fortegn omkring 9 Hz uden tegn på divergens, og i frekvensscannet for $a_0 = 20,1\text{ m/s}$ ses et tilsvarende skift omkring 14 Hz .

ser det ud til, at en ændring af a_0 giver anledning til en proportional skalering af grafen for middelværdien. Således findes resonansfrekvenserne, når bølgehastighedskonstanten er $26,8\text{ m/s}$, ved 5 Hz og $10,5\text{ Hz}$, mens resonanspunkterne ved en halvering af bølgelængden forekommer ved frekvenserne $2,5\text{ Hz}$ og $5,25\text{ Hz}$. Plottes resonansfrekvensen

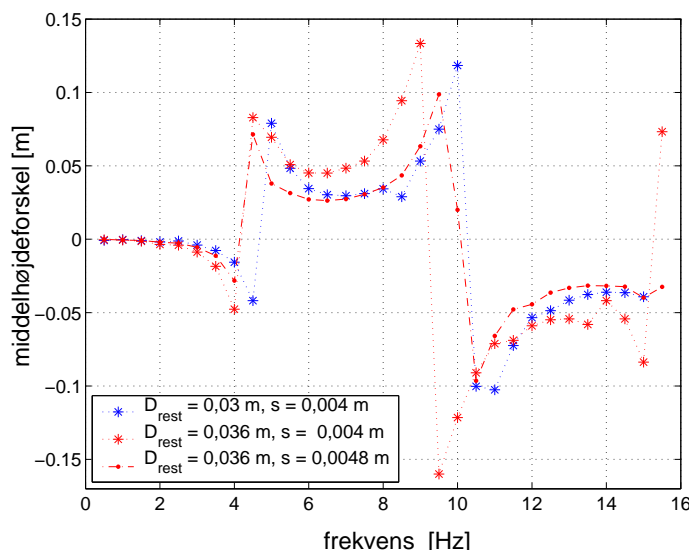


Figur 5.27 Resonansfrekvensen plottet som funktion af bølgehastighedskonstanten for det første og andet resonanspunkt. Ligningerne for de fittede linier er indsat.

som funktion af bølgehastighedskonstanten er der for både første og andet resonanspunkt en lineær sammenhæng og hældningskoefficienten er stort set dobbelt så stor ved det andet frekvenspunkt, således som det også blev beskrevet ovenfor, se figur 5.27. Et tredje resonanspunkt, som også blev observeret ved slangelængder på $2,2\text{ m}$ og $2,0\text{ m}$, ses i frekvenscannene for $a_0 = 13,4\text{ m/s}$ og $a_0 = 20,1\text{ m/s}$, og det bemærkes også, at fortegnet for middelhøjdeforskellen i disse to scan skifter fortegn uden der ses tegn på divergens, ligesom tilfældet var med frekvenscannet ved $l_0 = 2,2\text{ m}$.

I modsætning til ved undersøgelserne, hvor slangens længde blev ændret, ses der ved en ændring af bølgehastighedskonstanten en niveauforskel i middelhøjdeforskellen for $a_0 = 13,4\text{ m/s}$ i forhold til de to andre frekvensscan. I hvert frekvensscan er pumpens maksimale tryk ændret, således at en reducere af radius på 10 % kan fastholdes. En ændring af bølgehastighedskonstanten betyder jo netop en ændring af eksempelvis slangens elasticitet, hvilket påvirker pumpens effektivitet. Forskellen mellem de to frekvensscan med de højeste værdier af a_0 på den ene side og frekvenscannet med $a_0 = 13,4\text{ m/s}$ på den anden side kunne tyde på, at pumpens maksimale tryk alligevel ikke er ændret, så pumpen sammenpresser slangen lige meget ved de tre værdier af bølgehastighedskonstanten.

Ved at ændre hviletværsnitsarealet (og derved D_{rest} som indgår i a_0) af slangen, ændres placeringen af resonanspunkterne ligeledes. En forøgelse af tværsnitsarealet fører til lavere resonansfrekvenser, mens en mindskelse giver større resonansfrekvenser. Dette er i overensstemmelse med, hvad der er observeret ved en ændring af bølgehastighedskonstanten, idet D_{rest} forekommer i nævneren og en forøgelse af D_{rest} svarer derfor til en reducere af a_0 . Ændres D_{rest} samtidig med en ændring af vægtykkelsen af slangen s , således at a_0 fastholdes, bliver billedet mere kompliceret. Det første resonanspunkt ligger samme sted, som hvis det kun er D_{rest} , der ændres, mens det andet resonanspunkt falder sammen med placeringen af det andet resonanspunkt, når ingen parametre ændres, se figur 5.28. Størrelsen af middelhøjdeforskellen ændres, når slangens vægtykkelse ændres, således at en reducere af s giver anledning til en øget effektivitet af pumpen, hvilket vil sige en større middelhøjdeforskel mellem karrene, hvorimod en forøgelse giver en mindskelse af effektiviteten. Undersøgelsen, hvor D_{rest} og s ændres mens a_0 fastholdes



Figur 5.28 Frekvensscan med tre forskellige kombinationer af hvilediameteren D_{rest} og slangens vægtykkelse s . Grafen med blåt er den samme som grafen på figur 5.16. I scannene med henholdsvis $D_{rest} = 0,03\text{ m}$ og $s = 0,004\text{ m}$, og $D_{rest} = 0,036\text{ m}$ og $s = 0,0048\text{ m}$ er bølgehastighedskonstanten ens.

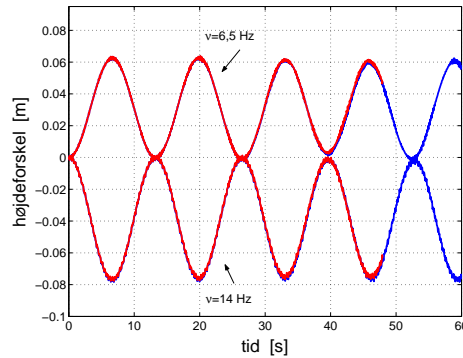
viser, at det ikke er en ændring af bølgehastighedskonstanten a_0 , der alene er ansvarlig for placeringen af resonanspunkterne, men at ændringen af andre parametre også spiller en afgørende rolle.

5.2.10 Resultater ved anvendelse af Lax-Wendroff-algoritmen

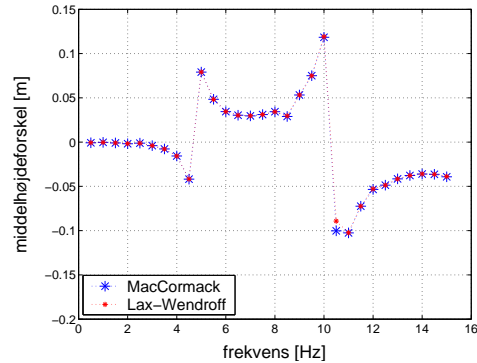
De præsenterede resultater har alle været beregnet med MacCormack-algoritmen. Resultaterne for den tyngdekraftsdrivne svingning viser ingen forskel på, om MacCormack- eller Lax-Wendroff-algoritmen benyttes, men gælder det også, når pumpen aktiveres? Jeg har ikke gentaget alle ovennævnte undersøgelser med Lax-Wendroff-algoritmen, men foretaget en stikprøvekontrol. På figur 5.29 og 5.30 ses resultatet, hvor de tilsvarende kørsler med MacCormack-algoritmen er plottet til sammenligning. Der er, som det ses på figur 5.29, fuldstændig sammenfald mellem løsningerne fra de to algoritmer, hvilket er årsagen til, at løsningen med Lax-Wendroff-algoritmen kun er vist til omkring 48 s, så det er muligt at se, at der er tale om to forskellige løsninger.

Overensstemmelsen mellem resultaterne ved anvendelse af de to algoritmer ses også på frekvensscannet, figur 5.30, hvor værdierne for kørslen med MacCormack-algoritmen er vist til sammenligning. Den eneste uoverensstemmelse ses ved $10,5\text{ Hz}$, men det er lige omkring et af resonanspunkterne, så denne afvigelse tillægger jeg ikke særlig betydning. Igen er afvigelsen ved $8,5\text{ Hz}$ meget standhaftig, hvilket viser at det ikke er en artefakt fra MacCormack-algoritmen.

I afsnittet om de numeriske metoder, afsnit 4, blev der i præsentationen af MacCormack- og Lax-Wendroff-algoritmerne gjort opmærksom på, at MacCormack-algoritmen har en



Figur 5.29 Kørsler med Lax-Wendroff-algoritmen med frekvenserne $\nu = 6,5 \text{ Hz}$ og $\nu = 14 \text{ Hz}$. Resultater med MacCormack-algoritmen for de samme parameterverdier er til sammenligning vist med blåt.



Figur 5.30 Frekvensscan med $\mu = 50\mu_{vand}$ med Lax-Wendroff-algoritmen. Det tilsvarende scan med MacCormack-algoritmen er til sammenligning vist med blåt og der ses kun en uoverensstemmelse ved $10,5 \text{ Hz}$.

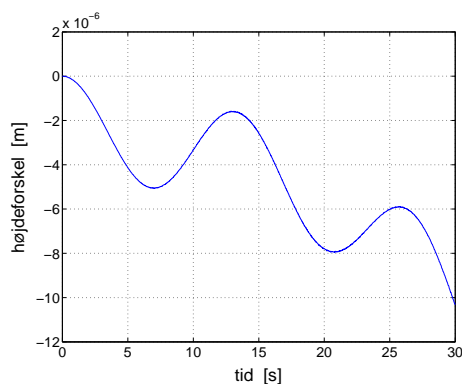
indbygget asymmetri, mens Lax-Wendroff-algoritmen er symmetrisk. Når de numeriske resultater fra de to metoder sammenlignes kommer denne forskel ikke til udtryk, hvis middelhøjdeforskellen mellem karrene er tilpas stor, således at små numeriske fejl ikke har betydning. Placeres pumpen i midten af slangen, hvorved højdeforskellen hele tiden ligger omkring nul, bliver det tydeligt at se, at der er en forskel på de to algoritmer, se figur 5.31 og 5.32.

Udover at forskellen mellem de to kar er meget mindre, når Lax-Wendroff-algoritmen anvendes (10^{-15} m mod 10^{-6} m for MacCormack-algoritmen), er det også tydeligt at højdeforskellen svinger omkring nul, i modsætning til ved MacCormack-algoritmen, hvor numerikken genererer en 'falsk' højdeforskel mellem karrene, dog en relativ lille forskel sammenlignet med forskellene, når pumpen ikke er placeret i midten af slangen. Disse observationer indikerer, at det vil være bedst at benytte Lax-Wendroff-algoritmen til at løse ligningerne i modellen.

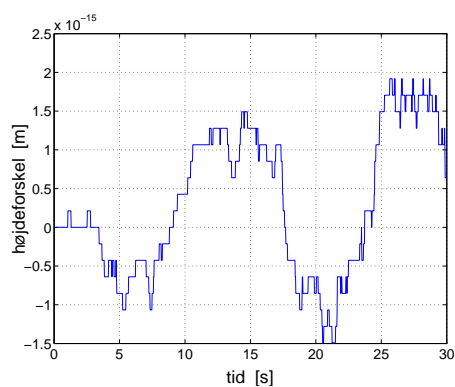
5.2.11 Ikke-konservativ form

Udledningen af den én-dimensionelle model for væskestrømningen i en elastisk slange, i afsnit 2.8, afsluttedes med opstillingen af et ligningssystem, som ikke kunne omskrives til konservativ form. I stedet blev der foretaget en approksimation, nemlig at $\Gamma = 0$, således at det var muligt at opstille ligningssystemet på konservativ form. Det kunne imidlertid være fordelagtigt, hvis det var muligt at undersøge betydningen af denne approksimation.

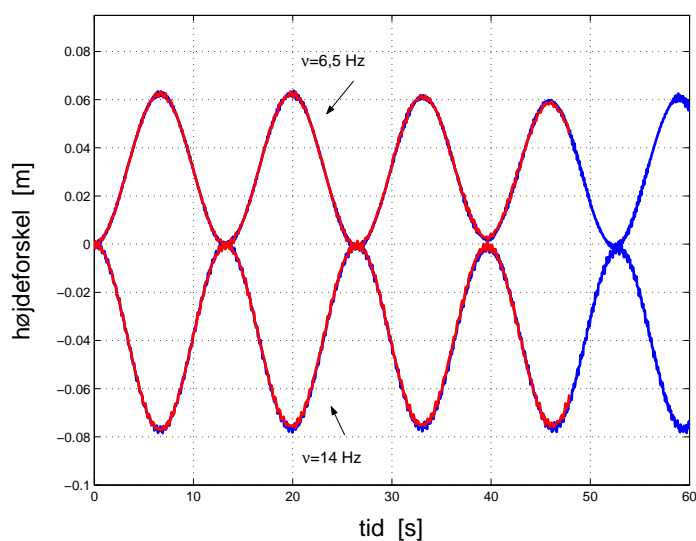
I afsnittet om de numeriske metoder, afsnit 4, blev det nævnt, at både MacCormack- og Lax-Wendroff-algoritmen oprindeligt er opstillet for ligningssystemer på konservativ form. Men i løsningen af den tyngdekraftsdrivne svingning blev det klart, at der i dette tilfælde ikke var forskel på, om ligningssystemet blev løst på konservativ eller ikke-konservativ form. Er det stadig tilfældet, når pumpen er aktiveret? På figur 5.33 er løsningen af ligningerne på ikke-konservativ form vist for frekvenserne $6,5 \text{ Hz}$ og 14 Hz . Løsningen er beregnet ved brug af MacCormack-algoritmen.



Figur 5.31 MacCormack-algoritmen. Pumpen er placeret i $x_c = 0,5 l_0$. Det er tydeligt at se, at forskellen mellem karrene vokser og at svingningsperioden fra den naturlige svingning igen viser sig.

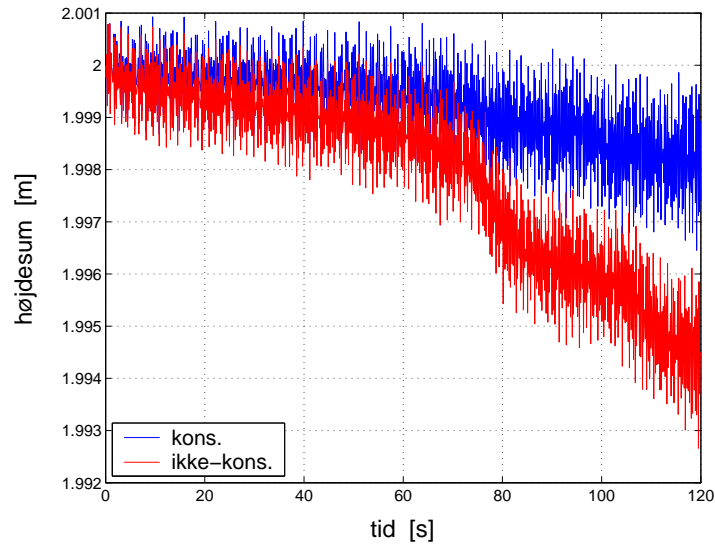


Figur 5.32 Lax-Wendroff-algoritmen. Pumpen er placeret i $x_c = 0,5 l_0$. Forskellen mellem karrene svinger omkring nul, dog med en tendens til at udsvingene vokser. Bemærk at enheden på ordinataksen er $10^{-15} m$, hvilket er minimumsgrænsen for MatLab; dette forklarer, hvorfor grafen ikke er glat.



Figur 5.33 Resultater for modellen på ikke-konservativ form ved to forskellige frekvenser. De tilsvarende kørsler med modellen på konservativ form er til sammenligning vist med blåt. Viskositeten er i alle fire kørsler lig nul.

For begge frekvenser er der stor overensstemmelse mellem graferne for højdeforskellen for de to løsninger. Betragtes summen af de to kars væskehøjder, ses der en tendens til, at løsningen af ligningerne på ikke-konservativ form kræver en finere diskretisering for at undgå massetab, det vil sige ustabilitet i løsningen, se figur 5.34.

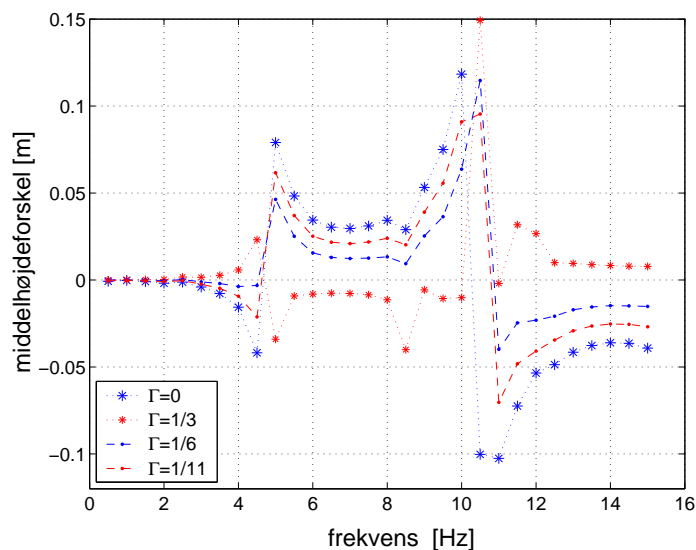


Figur 5.34 Summen af væskehøjderne i de to kar. Diskretiseringen er givet ved værdierne $J = 400$ og $\Delta t = 0,0005$ og frekvensen er $\nu = 14 \text{ Hz}$. Både når ligningssystemet er på konservativ og ikke-konservativ form ses der en manglende massebevarelse, idet hældningen af summen er forskellig fra nul. Fejlen er større, når ligningssystemet er på ikke-konservativ form end hvis ligningssystemet er på konservativ form. MacCormack-algoritmen er benyttet i begge tilfælde.

5.2.12 Approksimationen i opstillingen af den én-dimensionelle teori

Den eneste forskel, der synes at være mellem at løse modellen på konservativ og ikke-konservativ form, ligger således i hastigheden hvormed løsningen konvergerer, og det er derfor muligt at undersøge betydningen af approksimationen foretaget i opstillingen af den én-dimensionelle teori for væskestrømningen, nemlig at $\Gamma = 0$.

I bilag B findes ligningerne i modellen i tilfældet $\Gamma \neq 0$, og i figur 5.35 ses resultatet af tre frekvensscan med $\Gamma = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$. Værdien af Γ har stor betydning for højdeforskellens frekvensafhængighed. Værdien på $\frac{1}{3}$ svarer til $\gamma = 2$, hvilket er den mindste værdi γ kan have, idet det giver en parabolisk hastighedsprofil (mindre værdier vil give anledning til mere spidse profiler, som ikke er i overensstemmelse med de virkelig forhold). På figuren ses, at for $\Gamma = \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$ er der rimelig overensstemmelse med tilfældet, hvor $\Gamma = 0$, men for $\Gamma = \frac{1}{3}$ er frekvensbilledet fortegnsmæssigt spejlet, så ved de frekvenser, hvor højdeforskellen for $\Gamma = 0$ er negativ, er højdeforskellen nu positiv og omvendt ved de frekvenser, hvor højdeforskellen ved $\Gamma = 0$ er positiv, er den nu negativ. Når Γ går mod nul, ses graferne at konvergere med grafen for $\Gamma = 0$.



Figur 5.35 Frekvensscan med $\Gamma = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$, hvor tilfældet $\Gamma = 0$ er vist til sammenligning.

Ved at antage at Γ er tæt på nul medfører det, at γ er stor, hvilket i modellen kan fortolkes som en høj viskositet. Men da viskositeten først får en afgørende betydning for middelhøjdeforskellen omkring $100 \mu_{vand}$ kan γ uden de store konsekvenser for løsningen antages at være stor. Er $\gamma = 10$, hvilket svarer til $\Gamma = 1/11$ kan den faktiske viskositet beregnes ved at se på viskositetsleddet i ligningssystemet og antage, at hastighedsprofilen er parabolisk, det vil sige at proportionalitetskonstanten er 8:

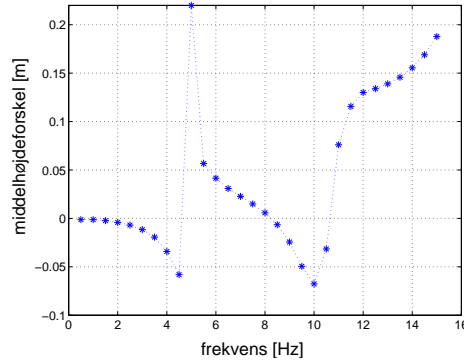
$$2\pi(\gamma + 2) \frac{\mu_{vand}}{\rho} = 2\pi(10 + 2) \frac{\mu}{\rho} = 8\pi \frac{3\mu_{vand}}{\rho}. \quad (5.9)$$

Den faktiske viskositet bliver således kun tredoblet, når $\gamma = 10$, og dette forenet med observationen, at en moderat viskositet ikke påvirker middelhøjdeforskellen retfærdiggør approksimationen $\Gamma = 0$ i det inhomogene led i ligningssystemet.

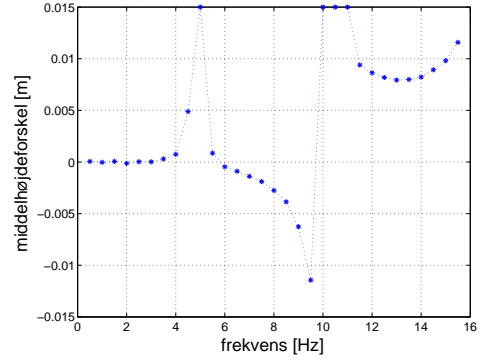
Det er sværere at retfærdiggøre approksimationen de to steder Γ indgår i ligningssystemets koefficientmatrix, fordi det kræver en fortolkning af de respektive led, der ikke synes oplagt. Overordnet kan man dog konkludere, at da strømmingen ikke er ren stationær, vil hastighedsprofilen i slangen være fladere end den paraboliske profil og Γ vil derfor være mindre end $\frac{1}{3}$. På figur 5.35 ses det, at de karakteristiske træk ved grafen for $\Gamma = 0$ allerede forekommer, når $\Gamma = \frac{1}{6}$, så approksimationen $\Gamma = 0$ synes i den sammenhæng rimelig.

5.2.13 Lineært ligningssystem og lineære randbetingelser

Γ er igen sat til nul og nu undersøges betydningen af ikke-lineariteten i ligningssystemet og randbetingelserne. Når pumpen er deaktiveret spiller de ikke-lineære led i ligningssystemet og i randbetingelserne ikke nogen betydelig rolle for beskrivelsen af fænomenet,



Figur 5.36 Frekvensscan, hvor ligningssystemet i modellen er lineariseret. Ved 5 Hz blev radius negativ i kørslen, selvom viskositeten er sat til $50\text{ }\mu\text{vand}$.



Figur 5.37 Frekvensscan, hvor ligningssystemet og randbetingelserne er lineariseret. Ved de frekvensværdier, hvor middelhøjdeforskellen er $0,015\text{ m}$ blev radius negativ i kørslen, selvom viskositeten er $50\text{ }\mu\text{vand}$.

idet svingningsperioden stemmer fuldstændig overens med perioden for det ikke-lineære ligningssystem, se eventuelt figur 5.6.

Når pumpen aktiveres er der imidlertid forskel på, om ligningssystemet er lineært eller ikke-lineært, se figur 5.36, hvor et frekvensscan for modellen med det lineære ligningssystem, men med de ikke-lineære randbetingelser er vist. På figur 5.37 ses et tilsvarende frekvensscan for modellen, hvor ligningssystemet samt randbetingelserne er lineariserede. For begge frekvensscan er det muligt at genfinde resonansfrekvenserne omkring 5 Hz og $10,5\text{ Hz}$, men fortegnet for middelhøjdeforskellen stemmer ikke overens med resultaterne fra den primære model i de mellemliggende frekvensområder, se eventuelt figur 5.16.

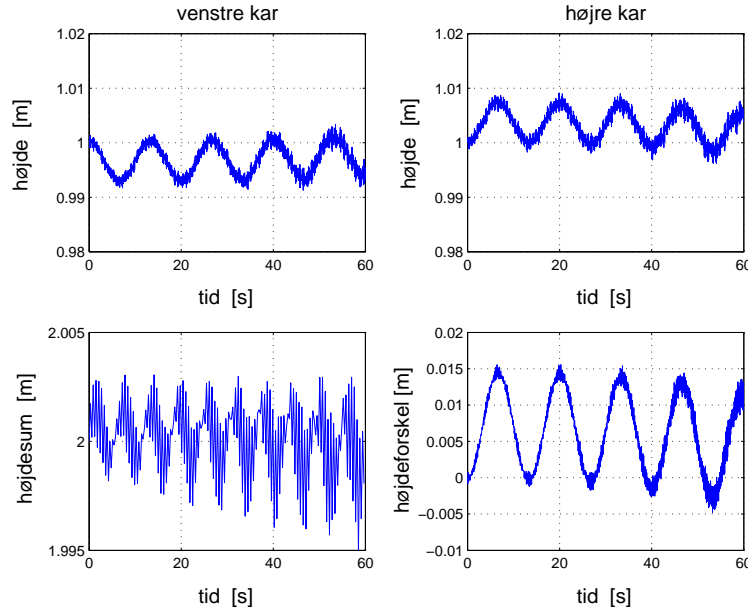
De to modificerede modeller giver således anledning til et pumpefænomen i kar-systemet omend der kun i nogen grad forekommer overensstemmelse med resultaterne for den primære (ikke-lineære) model. Frekvensværdierne, hvor middelhøjdeforskellen divergerer, ligger omtrent de samme steder, nemlig omkring 5 Hz og $10,5\text{ Hz}$.

5.2.14 Beskrivelser af pumpen

I de ovenstående undersøgelser er pumpen beskrevet ved en sinusfunktion i tiden, hvilket modellerer en situation, hvor pumpen skiftevis sammenpresser og udvider slangen. I en virkelig eksperimentel opstilling vil pumpen kun sammenpresse slangen, og det vil derfor give en bedre modellering af virkeligheden, hvis pumpen beskrives ved funktionen:

$$p_a(x, t) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \eta \frac{(x-x_A)(x_B-x)}{(x_B-x_A)^2} \sin(2\pi\nu t) \right) & \text{for } x \in [x_A, x_B], t \in \{t | \sin(2\pi\nu t) > 0\} \\ p_0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.10)$$

således som den også er angivet i afsnit 3.4. Resultatet for en kørsel med pumpefrekvensen $\nu = 6,5\text{ Hz}$ ses i figur 5.38; figur 5.33 kan bruges til sammenligning af højdeforskellene for at vurdere forskellen på de to forskellige scenarier. Det ses, at middelværdien af forskellen på vækehøjden i de to kar er numerisk mindre, når pumpen beskrives ved ligning (5.10), og at der ikke længere er massebevarelse.

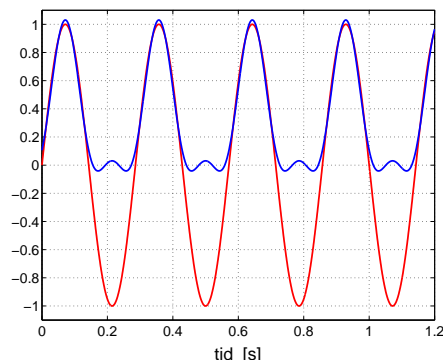


Figur 5.38 Den anvendte pumpefunktion er beskrevet i ligning (5.10) og pumpefrekvensen er $\nu = 6,5 \text{ Hz}$. Ustabiliteterne ses både i summen af væskehøjderne, der viser en faldende tendens, og i højdeforskellen.

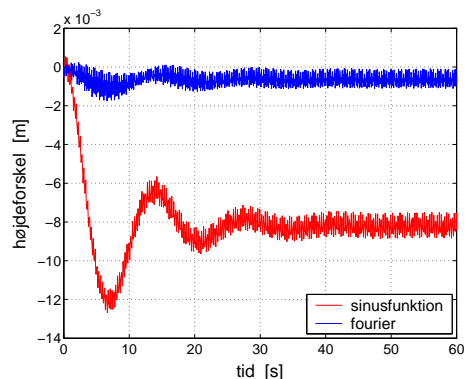
Observationen at der for høje frekvenser ikke er massebevarelse ved den valgte diskretisering af steds- og tidsdomænet giver en forklaring på, hvorfor der ikke er massebevarelse, når pumpen beskrives ved ligning (5.10) for frekvenser mindre end 10 Hz . Ved at betragte Fourierrækken for tidsdelen af pumpefunktionen findes forklaringen. Fourierrækken for tidsdelen af pumpefunktionen er givet ved:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(2\pi\nu t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2n\nu)t)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (5.11)$$

hvor ν er pumpefrekvensen. Lad N betegne antallet af led, der tages med fra den uendelige sum i Fourierrækken. Betragtes argumentet til cosinusfunktionen i summen, ses det at man faktisk skal have en pumpefrekvens under 5 Hz for at sikre, at der ikke allerede ved $N = 1$ forekommer frekvenser i Fourierrækken, der er større end 10 Hz . På figur 5.39 ses grafen for funktionen (5.11) for $N = 1$, og det ses, at funktionen allerede for $N = 1$ er tæt på nul, i de intervaller, hvor sinusfunktionen er negativ, så denne ligning er et udmærket alternativ til den benyttede gaffelfunktion. På figur 5.40 er der foretaget en sammenligning mellem kørsler, hvor tidsdelen er en 'regulær' sinusfunktion og en pumpefunktion, hvor tidsdelen er givet ved (5.11) med $N = 1$. I kørslerne er viskositeten sat til $10 \mu_{vand}$ for at dæmpe numeriske ustabiliteter. Når den negative del af sinusfunktionen medtages i pumpefunktionens tidsdel ses det, at pumpens effektivitet øges. Dette er lidt kontraintuitivt, idet det er mere nærliggende at tro, at den væske, der tvinges til hver side ved en sammenpresning af slangen ville blive suget tilbage til pumpeområdet ved en tvungen udvidelse, hvorved pumpeeffekten ville mindskes. Men på den anden side er der mere vand at skubbe til side ved næste sammenpresning, hvis det er blevet suget ind til



Figur 5.39 Grafen for funktionen (5.11) med $N = 1$ plottet sammen med en 'regulær' sinusfunktion. Frekvensen er 3, 5 Hz.



Figur 5.40 Sammenligning mellem kørsler, hvor tidsdelen af pumpefunktionen er henholdsvis en 'regulær' sinusfunktion og funktionen givet ved (5.11) med $N = 1$. Pumpefrekvensen er 3, 5 Hz og viskositeten er $\mu = 10 \mu_{vand}$.

pumpen umiddelbart før, hvilket kan forklare den øgede effektivitet.

5.2.15 Modellens begrænsninger

Udover at modellen er én-dimensionel, hvilket lægger nogle helt naturlige begrænsninger på modellen, eksempelvis er den oplagt ikke i stand til at beskrive hastighedsprofilen i slangen som funktion af radius og tiden, er der andre begrænsninger ved modellen som sandsynligvis skyldes de valg, der er taget undervejs i opstillingen af modellen. Her tænker jeg specielt på modelleringen af slangens elasticitet. Slangen er beskrevet ved en 'ring-model', hvor slangen forestilles inddelt i sektioner og elasticiteten af hver sektion er beskrevet gennem det tangentielle stress og der er set bort fra radiale stress. Dette gjorde det muligt at opstille en sammenhæng mellem det transmural tryk og tværsnitsarealet af slangen.

Det maksimale ydre tryk er fastsat således, at det giver anledning til en reducere af radius på 10 %, hvilket betyder, at slangen ikke vil være fuldstændig sammenpresset, når trykket fra pumpen er størst. Grunden til at jeg ikke har valgt et større maksimalt tryk, er at der ikke er noget i numerikken i MatLab-programmet, der forhindrer, at radius bliver negativ, så derfor er det vigtigt, for modellens gyldighed, ikke at komme for tæt på en totalt sammenpresset slange. Hvis det radiale stress i slangen medtages i modelleringen, vil det sandsynligvis være muligt at påføre slangen et større maksimalt tryk, idet det radiale stress er med til at sikre, at gradienterne ikke bliver for store, hvorved det bliver meget sværere at opnå en situation, hvor tværsnitsarealet er nul.

Det er dog en alvorlig begrænsning i modellen, at situationen, hvor slangen er helt sammenpresset, ikke kan beskrives, idet denne situation kan forekomme i et virkeligt eksperiment. Årsagen til begrænsningen er, at tværsnitsarealet står i nævneren i den konstitutive ligning. Selvom den konstitutive ligning er opstillet ud fra fysiske argumenter, kunne man argumentere for, at den konstitutive ligning alligevel skal korrigeres, eksempelvis ved at addere en konstant i nævneren, således at tværsnitsarealet kan blive nul ved en endelig

værdi af trykket for at gøre det muligt at modellere den givne situation. Det er dog ikke klart, om korrektionen ville kunne forhindre, at radius bliver negativ eller om denne fejl i modellen skyldes andre ting (der er foretaget kørsler med en finere diskretisering af steds- og tidsdomænet ved de frekvenser, hvor radius bliver negativ, men det hjælper ikke på problemet).

5.3 Opsamling

Egensvingningen for kar-systemet kan bestemmes, hvis pumpen deaktiveres og der i stedet er en højdeforskel mellem karrene til begyndelsestidspunktet. Når pumpen aktiveres og viskositeten er sat til nul, er det stadig muligt at se egensvingningen i graferne for højdeforskellen som funktion af tiden. Argumenterne for, at der faktisk er tale om egensvingningen, er at svingningsperioden stemmer overens med den numerisk bestemte periode i det tilfælde, hvor pumpen er deaktiveret, samt at der er en lineær sammenhæng mellem svingningsperioden og forholdet mellem tværsnitsarealerne af karrene og slangen, og at der er overensstemmelse mellem proportionalitetskonstanterne for den tyngdekraftsdrevne svingning og svingningen, når pumpen er aktiveret. Der er imidlertid en forskel på den analytisk og numerisk bestemte proportionalitetskonstant, som det har været vanskelig at redegøre for.

Viskositeten har ikke en betydning for, hvorvidt der forekommer en pumpeeffekt i systemet og ved mindre værdier af μ ($< 50 \mu_{vand}$) ses der ingen forskel mellem middelværdierne for højdeforskellen med og uden viskositet. Viskositeten dæmper stort set kun egensvingningen og dermed ikke pumpens effektivitet. Øges viskositeten, mindskes den numeriske middelværdi, hvilket vil sige at viskositeten har en indflydelse på effektiviteten af pumpen og ikke kun virker dæpende på egensvingningen. Dette er et tegn på ikke-lineariteten i systemet, idet et rent lineært system ville kunne beskrives som en superposition af egensvingningen og en drivende kraft, hvor det kun er egensvingningen, der vil blive dæmpet af gnidning i systemet.

I det frekvensinterval ($0 - 15 \text{ Hz}$), jeg har undersøgt, forekommer der ved en bølgehastighedskonstant på $26,8 \text{ m/s}$, to resonansfrekvenser, hvor højdeforskellen divergerer samtidig med et skift i fortegnet for middelhøjdeforskellen, det vil sige at strømmingen i kar-systemet skifter retning. En 'rigtig' resonansfrekvens i et lineært system forekommer som nævnt, når frekvensen for en drivende oscillerende kraft falder sammen med egensvingningsfrekvensen for systemet. I et urør med de samme proportioner som kar-systemet (med $D_k = 5,7$) ligger egensvingningsperioden omkring $13,5 \text{ s}$ svarende til en egenfrekvens på $0,07 \text{ Hz}$, men ved denne frekvens er der i kar-systemet ikke observeret tegn på resonans. Egenfrekvensen for urøret blev bestemt ud fra en førsteordens differentiaalligning, hvilket kun kan give én egenfrekvens for systemet. Kar-systemet kan imidlertid ikke beskrives ved én førsteordens differentiaalligning, og der er derfor mulighed for, at der forekommer flere egensvingninger og dermed flere resonansfrekvenser, hvilket ikke er utænkeligt, idet systemet er elastisk i modsætning til urøret.

Placeringen af de to mindste resonansfrekvenser er uafhængig af placeringen af pumpen og om væsken antages at være mere eller mindre viskøs. Et tegn på at der faktisk er tale om resonans er, at det er muligt at bestemme en værdi for middelhøjdeforskellen i og omkring resonansfrekvenserne, hvis viskositeten er forskellig fra nul.

Det viser sig også, at placeringen af den første og anden resonansfrekvens afhænger af bølgehastigheden og af længden af slangen. Igen observationer, der underbygger hypotesen om, at der faktisk er tale om resonansfrekvenser, idet ændringen af systemspecifikke parametre, såsom elasticiteten, tykkelsen og tværsnitsarealet af slangen, ændrer på placeringen af resonansfrekvensen, hvorimod parametre såsom placeringen af pumpen, der er en parameter knyttet til den ydre drivende kraft, ikke har betydning. Der er imidlertid undtagelser, idet systemspecifikke parametre såsom tværsnitsarealet af karrene ikke har en betydning for placeringen af resonanspunkterne, mens densiteten som er en parameter knyttet til væsken har betydning, hvorimod viskositeten af væsken ikke har. At karrenes tværsnitsareal ikke har betydning indikerer, at der er tale om sammenfald mellem pumpefrekvensen og en egensvingning i slangen forårsaget af elasticiteten og ikke en egensvingning knyttet til hele systemet. Dette underbygges af observationen, at væskens højde i karrene til begyndelsestidspunktet viser sig at have en betydning for resonanspunkterne, idet væskehøjden i karrene bestemmer det hydrostatiske tryk i slangen og derved slangens tværsnitsareal.

Hvis det er et sammenfald mellem pumpefrekvensen og egensvingninger i slangen, der er ansvarlig for resonansfrekvenserne, vil det være mest nærliggende at tro, at resonansfrekvenserne forekommer, når længden af slangen svarer til bølgelængden af pumpefrekvensen, det vil sige, at resonansfrekvensen skulle være proportional med bølgehastigheden og omvendt proportional med længden af slangen. Der burde således være en resonansfrekvens ved en pumpefrekvens på $14,84 \text{ Hz}$, men her forekommer der ikke et resonanspunkt i de numeriske undersøgelser (der er ikke antydning af resonans ved $14,84 \text{ Hz}$, som var den frekvens, der blev brugt i det første positionsscan, se figur 5.18). Derudover er de to første resonansfrekvensers afhængighed af bølgehastigheden og slangens længde undersøgt, og det viser sig, at resonansfrekvensen ikke er omvendt proportional med længden af slangen, idet eksponenten er henholdsvis $-0,71$ for det første resonanspunkt og $-0,84$ for det andet resonanspunkt.

Der forekommer også skift i fortegnet for middelhøjdeforskellen uden divergens. Forekomsten og placeringen af disse nulpunkter afhænger i modsætning til resonanspunkterne af pumpens placering og ovenstående observationer indikerer, at det ikke er de samme mekanismer, der er ansvarlig for genereringen af alle fortegnsskift i højdeforskellen og at der skal skelnes mellem fortegnsskift, hvor middelhøjdeforskellen divergerer, når der ingen gnidning er og fortegnsskift, hvor middelhøjdeforskellen bliver nul. Dette vidner om en noget større kompleksitet i kar-systemet end først antaget.

I et forsøg på at forklare de kvantitative forhold omkring strømningsfænomenet er trykbølgerne i slangen undersøgt. Udover at det transmural tryk synes at være størst ved den rand, hvor væskehøjden i det tilstødende kar står højest, er det vanskeligt at finde en systematik eller forklaring på fænomenet i disse undersøgelser.

Ved en linearisering af alle ligningerne i modellen mistes pumpeeffekten ikke, men den ændres, således at der ikke er den samme overensstemmelse mellem frekvensen og fortegnet for middelhøjdeforskellen. Resonansfrekvenserne genfindes også ved en linearisering, men i dette tilfælde divergerer højdeforskellen i resonanspunkterne, selvom viskositeten er sat til en høj værdi.

Der er i store træk overensstemmelse mellem resultaterne med de to anvendte algoritmer, men ved at placere pumpen i midten af slangen er det muligt at se den asymmetri, der blev bemærket i præsentationen af MacCormack-algoritmen og som ikke forekommer i

Lax-Wendroff-algoritmen. De numeriske fejl i højdeforskellen er dog små i forhold til højdeforskellen, når pumpen ikke er placeret i midten af slangen og i det tidsinterval, der undersøges (60 sekunder), er den akkumulerede fejl tydeligvis lille.

Forskellen mellem løsningerne af ligningssystemet på konservativ og ikke-konservativ form kan kun ses på summen af væskehøjden i karrene og ikke ved en sammenligning af graferne for højdeforskellen. Ved at løse ligningerne på ikke-konservativ form er det nødvendigt med mindre tids- og stedsskridt i algoritmen for at undgå massetab, det vil sige at løsningen konvergerer langsommere, når ligningerne løses på ikke-konservativ form.

6 Sammenligning med resultater fra litteraturen

I det foregående afsnit blev resultaterne fra de numeriske undersøgelser af den opstillede model præsenteret, diskuteret og sammenlignet med analytiske resultater for urøret i det omfang, det var muligt. Her diskuteres de numeriske resultater i forhold til resultater fra tilsvarende modeller for kar-systemet, og resultater for ring-systemet omtalt i indledningen sammenlignes med resultaterne for kar-systemet med det formål at afgøre, om systemerne er ækvivalente. I litteraturen antages det, at det samme fænomen er på spil i begge systemer [Rath & Teipel, 1978][Thomann, 1978][Takagi & Takahashi, 1983a][Moser et al., 1998][Borzi & Propst, 2003] og man må gå ud fra, at der dermed ikke kun menes, at der i begge systemer foregår ‘pumpning uden ventiler’, men derimod at hvis fænomenet i det ene system kan forklares, så kan forklaringen overføres til det andet system.

Resultaterne fra undersøgelserne af de numeriske metoder sammenholdes med lignende undersøgelser i litteraturen og spørgsmålet om konservative former i forhold til ikke-konservative former forsøges afklaret.

I det følgende henvises til modeller, som er nærmere beskrevet i indledningen til rapporten.

6.1 Sammenligning med andre modeller

Modellerne for kar-systemet opstillet i [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003] svarer på mange måder til modellen opstillet i denne rapport. Navier-Stokes-ligninger i én dimension beskriver væskestrømningen i slangen, et variabelt ydre tryk beskriver sammenpressningen af slangen og endelig randbetingelser, der beskriver væskehastigheden på randen og væskehøjderne i karrene. I alle tre modeller er væskestrømningshastigheden den ene afhængige variabel, mens den anden variabel er forskellig i de tre modeller. Rath [1976] regner på bølgehastigheden, mens Borzi & Propst [2003] har indført trykket som den anden variabel, og som bekendt er det i denne rapport tværsnitsarealet. Men det burde teoretisk set ikke give anledning til, at de numeriske resultater for de tre modeller er forskellige, fordi ligningssystemerne er ækvivalente. Jeg henviser til modellen opstillet i denne rapport som areal-modellen¹, mens de to andre modeller omtales som henholdsvis Rath- og Borzi-modellen.

Der er imidlertid punkter, hvor Rath- og Borzi-modellen adskiller sig fra areal-modellen, og punkter, hvor de to omtalte modeller heller ikke er ens og det vil jeg uddybe i det følgende.

¹Betegnelsen dækker over mere end blot den primære model, idet der med areal-modellen eksempelvis også tænkes på den opstillede model med lineariserede ligninger.

I opstillingen af både Rath- og Borzi-modellen er udgangspunktet lagt i de midlede én-dimensionelle Navier-Stokes-ligninger, svarende til dem, der blev udledt i afsnit 2.8 med $\Gamma = 0$. Midlingen er ikke udført eksplicit og approksimationen $\Gamma = 0$ omtales ikke.

I areal-modellen benyttes en anden konstitutiv ligning end den, der bruges i Rath- og Borzi-modellen. Argumenterne for at bruge denne ligning frem for den anden er, at ligningen kan udledes ud fra fysiske principper og at der ved den valgte ligning opnås en bedre beskrivelse af eksperimentelle resultater. Den valgte konstitutive ligning findes også brugt i andre artikler, hvor strømningen i en elastisk slange eller blodstrømningen i et blodkar beskrives ved én-dimensionelle modeller [Rubinow & Keller, 1972][Olufsen, 1998][Chattopadhyay & Sil, 2003].

Derudover er der i areal-modellen taget højde for, at det hydrostatiske tryk fra karrene giver anledning til, at slangen, inden pumpningen begynder, er udvidet, det vil sige at $A_{start} \neq A_{rest}$, hvilket ikke er medtaget i de to andre modeller. Med den væskehøjde, der benyttes i karrene, har denne forskel i modelleringerne dog ingen væsentlig betydning i forhold til de kvalitative resultater.

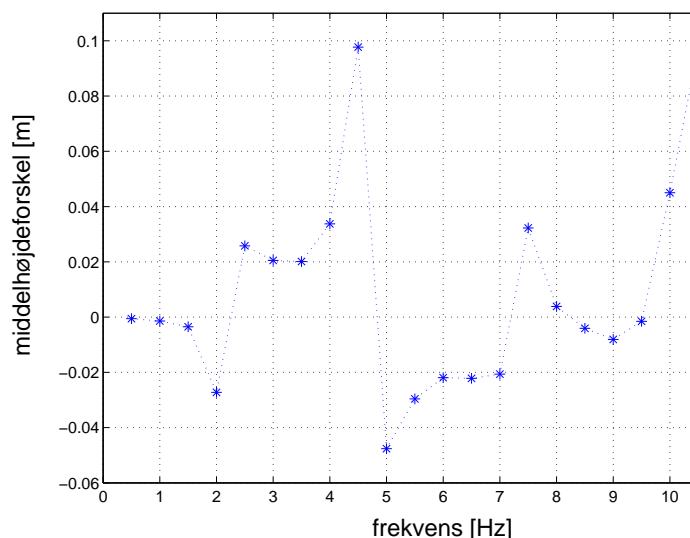
I randbetingelserne i areal-modellen er tværsnitsarealet variabelt, mens det i de to andre modeller antages fastholdt. Det er imidlertid ikke helt korrekt, idet bølgehastigheden og trykket på randen i Rath- og Borzi-modellen stadig er variable. Bølgehastigheden og trykket er begge koblet til tværsnitsarealet gennem henholdsvis egenverdierne og den konstitutive ligning, så hvis tværsnitsarealet er fastholdt på randen, så vil de to andre variable også være det. Når tværsnitsarealet således i de to artikler antages at være lig hviletværsnitsarealet betyder det i praksis, at tværsnitsarealet er holdt konstant, de gange kontinuitetsligningen ($A_1 u_1 = A_2 u_2$) benyttes i opstillingen af randbetingelserne. Ved at ændre randbetingelserne i areal-modellen, således at tværsnitsarealet fastholdes, når kontinuitetsligningen benyttes, ses kun en meget lille effekt på de numeriske løsninger.

I areal-modellen er randbetingelserne opstillet ud fra den instationære Bernoulliligning, hvilket også er gjort i Rath-modellen, mens den stationære Bernoulliligning er benyttet i Borzi-modellen. Brugen af begge ligninger medfører approksimationer, idet den instationære Bernoulliligning kun kan benyttes til ikke-viskøse væsker, hvor rotationen er nul, og den stationære Bernoulliligning kræver en antagelse om, at væskestrømningen kan betragtes som stationær på randen og derudover antages det i opstillingen af Borzi-modellen, at hastigheden af væsken i bunden af karrene er nul. Ved brug af den stationære Bernoulliligning tages der således ikke højde for strømningsdynamikken i karrene, heller ikke med hensyn til tab af energi ved ind- og udstrømning.

Endelig er der beskrivelsen af pumpen. I begge de omtalte modeller er tidsdelen af pumpefunktionen en sinusfunktion, hvilket er den samme tidsdel, som bruges i areal-modellen. Stedsdelen i både Rath- og Borzi-modellen er parabler, hvilket betyder, at den stedsafledte af det ydre tryk bliver diskontinuert. I areal-modellen anvendes et fjerdegrads-polynomium, der sikrer kontinuiteten af den stedsafledte, således at betingelsen brugt i midlingen af Navier-Stokes-ligningerne er overholdt, og derudover giver det en beskrivelse af koblingen mellem tværsnitsarealet og det transmural tryk, der er i bedre overensstemmelse med virkelige forhold.

6.2 Sammenligning af resultater

De fysiske data, der er brugt i de numeriske undersøgelser i denne rapport, svarer til en konkret fysisk opstilling og er derfor ikke alle i overensstemmelse med data fra kørslerne med Rath- og Borzi-modellen. For bedre at kunne sammenligne resultaterne har jeg derfor foretaget et frekvensscan med parameterværdier svarende til dem, der er benyttet i [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003] og resultatet ses i figur 6.1.



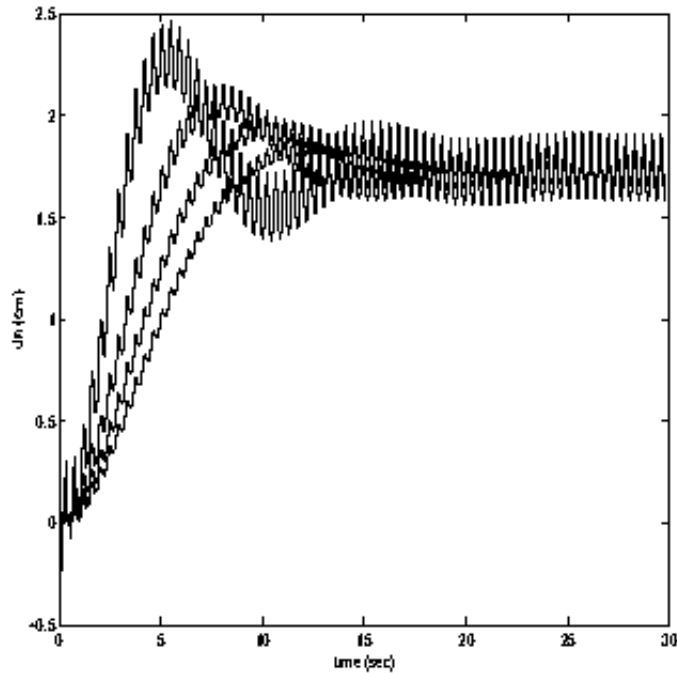
Figur 6.1 Frekvensscan med ændrede parameterværdier; $a_0 = 11,95 \text{ m/s}$, $D_{rest} = 0,0165 \text{ m}$ og $D_{kar} = 0,155 \text{ m}$. Scannet er afsluttet ved $10,5 \text{ Hz}$, fordi løsningen bliver ustabil for større frekvensværdier ved den valgte diskretisering.

Sammenlignes der med et frekvensscan fra [Rath, 1976] er der overensstemmelse med hensyn til placeringen af de to første resonanspunkter og fortegnet for middelhøjdeforskellen for frekvenser under 7 Hz , se figur 1.2. Ved $7,5 \text{ Hz}$ og omkring $10,5 \text{ Hz}$ synes der at være endnu to resonansfrekvenser, mens det kun er resonanspunktet ved $10,5 \text{ Hz}$, der forekommer i resultaterne i [Rath, 1976]. Der er ikke foretaget et frekvensscan i [Borzi & Propst, 2003], fordi forfatterne mere er interesseret i at vise, at middelhøjdeforskellen skifter fortegn end i at forklare, hvorfor det sker ved bestemte frekvenser; det observeres, at der ved en pumpefrekvens på $2,33 \text{ Hz}$ er en positiv middelhøjdeforskel, mens forskellen er negativ ved en frekvens på $4,65 \text{ Hz}$. Disse resultater er vanskelige at verificere i arealmodellen og for den sags skyld også gennem graferne i [Rath, 1976], fordi begge frekvensværdier ligger lige oven i de to første divergensområder, hvilket giver anledning til en vis usikkerhed med hensyn til bestemmelsen af fortegnet for middelhøjdeforskellen. Det forekommer lidt mærkeligt, at Borzi & Propst [2003] har valgt at benytte netop disse to frekvenser igennem deres artikel, idet de tydeligvis har haft kendskab til resultaterne fra [Rath, 1976] og derfor burde kunne se, at disse to frekvensværdier ligger i områder, hvor middelhøjdeforskellen synes at divergere (se eventuelt figur 1.2, og benyt at de to frekvensværdier svarer til vinkelfrekvensværdier på henholdsvis $14,64 \text{ s}^{-1}$ og $29,22 \text{ s}^{-1}$).

Der hvor forskellene mellem resultaterne fra de tre modeller træder frem, er i graferne

for højdeforskellen som funktion af tiden. I undersøgelser for areal-modellen viste det sig, at højdeforskellen svinger mellem nul og en konstant værdi, når væsken antages at være ikke-viskøs, og at svingningen svarede til den naturlige svingning for systemet, mens de små svingninger indlejret i den naturlige svingning kunne tilskrives pumpen. For en viskøs væske blev det klart, at den naturlige svingning blev dæmpet, hvorfor højdeforskellen gik imod en konstant værdi (svingningerne fra pumpen vedblev at være tilstede).

Disse karakteristika genfindes tildels i [Rath, 1976] – omend de eneste frekvenser, hvor højdeforskelsgraferne er vist ligger omkring 11 Hz (det vil sige i et af divergensområderne), så det er svært at foretage en ordentlig sammenligning – mens de ikke genfindes i [Borzi & Propst, 2003]. I sidstnævnte artikel er der ikke kvalitativ forskel på den tidlige udvikling af højdeforskellen, hvorvidt væsken er viskøs eller ej og højdeforskellen svinger ind på samme måde som mine resultater viser, når viskositeten er sat til ca. 10 gange vands viskositet, se figur 6.2 og sammenlign eventuelt med figur 5.12, hvor grafer for μ_{vand} og $\mu = 50\mu_{vand}$ er vist.



Figur 6.2 Den tidlige udvikling af højdeforskellen mellem væsken i karrene. Tiden i sekunder er på abscisseaksen ($0 - 30\text{ s}$), mens højdeforskellen angivet i centimeter er på ordinataksen ($-0,5 - 2,5\text{ m}$). De fire grafer svarer til kørsler med værdierne $D_k^2 = 25, 50, 75, 100$. Viskositeten er nul. [Borzi & Propst, 2003]

Borzi & Propst [2003] har således konstrueret en model, der er i stand til at beskrive et fænomen, der svinger ind omkring en værdi forskellig fra ligevægtsværdien *uden* tilstedeværelsen af gnidning i systemet og hvor den drivende kraft svinger om nul. Var ligningerne i modellen lineære ville man ikke forvente dette resultat, men det er sværere at forudsige, hvordan systemet burde opføre sig, når ligningerne ikke er lineære. Borzi &

Propst [2003] observerer, hvilket passer med mine resultater for høje værdier af viskositeten, at viskositeten har betydning for effektiviteten af pumpen, så på det punkt er der overensstemmelse med resultaterne præsenteret i denne rapport – i hvert fald kvalitativt, for Borzi & Propst [2003] angiver ikke talværdier for den faldende effektivitet eller viser grafer, hvorfra det kan aflæses.

I [Rath, 1976] ses svingninger med perioder på omkring 22 s, der dæmpes, hvis væsken antages viskøs, hvilket er i god overensstemmelse med observationerne i denne rapport². I en senere artikel af Rath & Teipel [1978] nævnes det desuden, at der ved gnidningsfri strømning i kar-systemet blev observeret store svingninger i højdeforskellen samtidig med at middelværdien syntes at være konstant og at svingningsperioden var identisk med perioden for en svingende væske i et urør med samme dimensioner. Denne kommentar stemmer overens med mine resultater.

Den eneste umiddelbare forklaring på uoverensstemmelserne (bortset fra forklaringen, at viskositeten faktisk er forskellig fra nul i graferne i [Borzi & Propst, 2003]) ligger i de forskellige algoritmer, der er benyttet, fordi de resterende forskelle mellem modellerne ikke synes at kunne give anledning til så store forskelle. I [Borzi & Propst, 2003] benyttes den mere moderne MUSCL-Hancock-algoritme og det er muligt, at den opererer med hvad der i litteraturen omtales som ‘kunstig’ viskositet; en indbygget dæmpning i algoritmer, som skal mindske ophobningen af numeriske fejl [Moretti, 1972a][Baum & Levine, 1983][Davis, 1987], men det forekommer lidet plausibel, idet den kunstige viskositet ikke burde kunne give anledning til så væsentlige afvigelser. Jeg har ikke fundet udtalelser eller undersøgelser af algoritmen i litteraturen, der bekræfter denne hypotese og jeg har ikke selv undersøgt metoden nærmere.

Ud fra fire frekvensscan med forskellige slangelængder, bemærker Rath [1976], at produktet

$$\frac{2 \pi \nu_1 l_0}{a_0} \sqrt{\frac{x_c}{l_0}} \left(r_{rest} \sqrt{\frac{2 \pi \nu_1 \rho}{\mu}} \right) \quad (6.1)$$

er konstant ved indsættelse af frekvensen for det første nulpunkt³, ν_1 . Det betyder altså, at hvis en af parametrene i produktet ændres, så vil frekvensen for det første nulpunkt også ændres. Det kan lige nævnes, at Rath [1976] henviser til den første faktor som den dimensionsløs størrelse kaldet Strouhal tallet⁴, mens den sidste faktor er Womersley tallet. Når Rath [1976] postulerer, at produktet er konstant, må det betyde, at det stadig er konstant, hvis eksempelvis viskositeten ændres i stedet for længden af slangen. Men det stemmer ikke overens med mine resultater, idet det er klart, at viskositeten og placeringen af pumpen ikke har synlig betydning for placeringen af resonanspunkterne. Og placeringen af det første resonanspunkt er nærmere omvendt proportional med længden af slangen og proportional med bølgehastighedskonstanten, hvilket ikke stemmer overens med det angivne produkt (6.1).

²Hvis parameterværdierne fra [Rath, 1976] benyttes i modellen fås en egensvingningsperiode i urøret på 21, 49 s.

³Rath [1976] skelner ikke mellem resonanspunkter og nulpunkter.

⁴Strouhal tallet er defineret som $\nu r_0/u_0$, hvor ν , r_0 og u_0 er henholdsvis frekvensen og en karakteristisk længde og hastighed for systemet. Det er kun i [Rath, 1976] og [Rath & Teipel, 1978], at jeg har set, at bølgehastigheden og ikke væskestrømningshastigheden bruges som karakteristisk hastighed for systemet. Det er lidt underligt at definere bølgehastigheden som den karakteristiske hastighed for systemet, idet dimensionsløse størrelser såsom Reynolds tal, Froude tallet og Strouhal tallet alle angiver forhold mellem kræfterne i systemet, der afhænger af væskestrømningshastigheden og ikke af bølgehastigheden.

6.3 Ækvivalensen mellem kar- og ring-systemet

Den eneste modellering af ring-systemet, hvor man har foretaget et frekvensscan, er i [Ottesen, 2003]. Sammenlignes frekvensscan fra kar-systemet og ring-systemet, se eventuelt figur 1.3 og 5.15, er der betydelige forskelle. I frekvensscannet for ring-systemet er der en overvejende retning væsken vil løbe, idet fortegnet for flowet overvejende er positivt, og de gange flowet skifter retning sker det over et meget lille frekvensinterval. Dette er i modsætning til frekvensscannet for kar-systemet, hvor middelværdien af højdeforskellen ikke overvejende er positiv eller negativ og hvor skift i fortegn kan være forbundet med divergens i højdeforskellen. Et karakteristika, der ikke genfindes i ring-systemet.

I [Ottesen, 2003] er der ikke lavet undersøgelser for at klargøre, hvilken betydning, de forskellige parametre for slangen har for strømningsfænomenet, så derfor er en sammenligning af afhængigheden af disse parametre ikke mulig. Derimod er det undersøgt, hvilken betydning viskositeten har for fænomenet, og det viser sig at viskositeten ikke kvalitativt har den store betydning for middelflowets frekvensafhængighed, men at der kvantitativt ses en forskel på om flowet skifter retning ved en bestemt frekvens. Der er en tendens til, at størrelsen af de udsving, der ses i middelflowet, se figur 1.3, *mindskes* når væsken *ikke* er viskøs, hvilket ikke stemmer overens med resultaterne for kar-systemet, hvor det er høje værdier af viskositeten, der mindsker den opnåede højdeforskel mellem karrene.

I og med at der ikke observeres frekvenssværdier i ring-systemet, hvor flowet divergerer, kunne det tyde på, at tilstedeværelsen af disse punkter i kar-systemet er specielt for dette system. Dette er et argument for, at disse skift i kar-systemet er genereret af egensvingninger i systemet og ikke i slangen alene, idet der derved også burde forekomme resonanspunkter i ring-systemet.

I [Jung & Peskin, 2001] er det transmural tryk i den elastiske del af et ring-system undersøgt, og resultaterne er omtalt i indledningen til denne rapport, se figur 1.4. Der er ikke overensstemmelse med de tilsvarende resultater præsenteret i resultatafsnittet, idet der her ikke blev observeret knuder ved randene af slangen eller mønstre, der kunne tolkes som vandrende bølger. Ud fra frekvensscannene og undersøgelserne af det transmural tryk er der ikke noget, der tyder på, at de to systemer er ækvivalente, og at en forklaring af det ene system kan overføres til det andet.

6.4 Den numeriske metode

I litteraturen findes forskellige undersøgelser, hvor Lax-Wendroff-algoritmen og MacCormack-algoritmen er blevet testet på visse quasi-lineære hyperbolske ligningssystemer [Abarbanel & Zwas, 1969][Moretti, 1972a][Sod, 1978][Baum & Levine, 1983][Elad et al., 1991]. Typisk drejer det sig om undersøgelser af, hvordan algoritmerne håndterer diskontinuiteter eller chok⁵. Ligningssystemerne beskriver typisk et tænkt system, hvor en membran, der adskiller områder med forskellig væskestrømningshastighed, tryk og densitet fjernes, hvilket giver anledning til diskontinuiteter i løsningen [Sod, 1978][Pearson & Winterbone, 1997]. Ligningerne muliggør en analytisk løsning, som herefter kan

⁵Chok defineres som en diskontinuitet, hvor der på hver side findes en glat løsning [Baum & Levine, 1983].

sammenlignes med den numeriske løsning, hvorved det bliver muligt at vurdere den anvendte numeriske metode.

Resultater fra sådanne undersøgelser viser, at der ved begge algoritmer opstår 'ikke-fysisk forklarlige' oscillationer omkring diskontinuiteterne og der er en udbredt usikkerhed om oscillationerne kan blæse op på grund af ikke-lineariteten i ligningerne og give anledning til, at den numeriske løsning ingen relation har til det modellerede område, og at oscillationerne i værste fald kan føre til numeriske ustabiliteter [Baum & Levine, 1983].

Udover denne type af undersøgelser, hvor resultaterne fra de numeriske metoder sammenlignes med analytiske løsninger, findes der undersøgelser, hvor de numeriske løsninger beregnet med de to algoritmer – eller hvor den ene algoritme sammenlignes med en anden numerisk metode (eksempelvis karakteristikmetoden) – sammenlignes i forbindelse med, at en opstillet model for et givent virkelighedsområde ønskes løst [Poloni et al., 1987][Elad et al., 1991][Bellos & Hrisanthou, 2003]. Typisk modelleres pulserende væskestrømning i rør, hvor impulstilførslen ligger i et af randpunkterne og altså ikke i de indre punkter i stedsdomænet, som tilfældet er med kar-systemet, og hvor der således ikke optræder feedback mekanismer på samme måde, så selvom algoritmerne konvergerer i de ovennævnte undersøgelser er det ikke sikkert, at disse resultater kan overføres til kar-systemet.

Der er i litteraturen eksempler på, at ligningssystemer, der kan skrives på konservativ form løses ved at benytte algoritmerne på ikke-konservativ form [Bellos & Hrisanthou, 2003], og eksempler, hvor ikke-konservative ligningssystemer løses ved at benytte de to algoritmer [Smith et al., 2002], men der forekommer ingen bemærkninger om numeriske uoverensstemmelser eller kommentarer om hvorvidt det er forsvarligt at benytte algoritmerne på ligningssystemer på ikke-konservativ form.

Der er meget få artikler, der konkret beskæftiger sig med spørgsmålet om forskellen mellem konservative former og ikke-konservative former i forbindelse med numeriske løsninger. Oprindeligt blev brugen af algoritmer for konservative former introduceret i håb om, at det ville kunne skabe masse- og impulsbevarelse i forbindelse med diskontinuiteter og chok [Moretti, 1972b], og det synes at være en almen opfattelse, at det kun er muligt at beregne den rigtige løsning i disse tilfælde, hvis ligningerne er på konservativ form [Toro, 1997, s. 91].

I den opstillede model for kar-systemet forventes løsningen at være glat og det burde derfor være underordnet om ligningssystemet løses på konservativ eller ikke-konservativ form [Toro & Siviglia, 2003]. Det observeres imidlertid, at der er en forskel på, hvor hurtig løsningen konvergerer og skal ligningerne i modellen løses for et langt tidsinterval er det muligt, at diskretiseringen, for at undgå en betydende ophobning af numeriske fejl, skal være så fin, at beregningstiden bliver urealistisk lang.

Ligningssystemerne i Rath- og Borzi-modellen er på ikke-konservativ form, men kan ved passende variabelskift omskrives til ligningssystemer på konservativ form (idet de jo er ækvivalente med ligningssystemet i areal-modellen). I [Rath, 1976] og [Borzi & Propst, 2003] undersøges massebevarelse ikke og selvom det var blevet undersøgt er tidsdomænet for beregningerne forholdsvis lille (0 – 30 s), så det er muligt, at ophobningen af numeriske fejl alligevel ikke har været stor nok til at kunne observeres.

Som nævnt i indledningen har det ikke været muligt at løse Rath- og Borzi-modellen ved brug af MacCormack-algoritmen og en af grundene til at opstille en model for kar-systemet med tværsnitsarealet og væskestrømningshastigheden som de variable var for

at undersøge om det, at ligningerne ikke blev løst på konservativ form måske var en af årsagerne til problemerne. Men denne forklaring synes efter undersøgelserne af arealmodellen og ud fra udsagn i litteraturen ikke at være plausibel.

7 Konklusion

Modellen for kar-systemet er blevet opstillet på baggrund af en midling af Navier-Stokes-ligningerne og ligningerne i modellen er løst numerisk ved brug af finite difference metoder. Sammenligningerne af resultaterne fra de to numeriske metoder, MacCormack-algoritmen og Lax-Wendroff-algoritmen, viser at der er en lille forskel på algoritmerne, som dog kun kan ses, når middelhøjdeforskellen er nul. Den numeriske forskel finder sin forklaring i en analyse af algoritmerne, der viser, at MacCormack-algoritmen har en indbygget asymmetri i approksimationerne af de stedlige afledte.

I analysen af de numeriske undersøgelser af modellen er der fokuseret på de frekvenser, hvor fortegnet for middelhøjdeforskellen skifter. En afklaring af hvilke parametre i modellen, der bestemmer forekomsten og placeringen af disse frekvenser vil måske kunne afgøre, hvad der i første omgang genererer en højdeforskel. Der viser sig at være tale om to forskellige typer af punkter, hvor middelhøjdeforskellen skifter fortegn. Den ene type punkter har karakter af resonanspunkter, hvor den numeriske værdi af middelhøjdeforskellen ser ud til at vokse ubegrænset på hver side af punktet og i selve punktet lader middelhøjdeforskellen sig ikke beregne medmindre viskositeten er forskellig fra nul. Ved de andre punkter, kaldet nulpunkterne, ændres værdien af højdeforskellen kontinuert fra at være eksempelvis negativ til positiv og det er således muligt at finde en frekvens, hvor middelhøjdeforskellen bliver nul, selvom pumpen ikke er placeret i midten af slangen.

Placeringen af resonanspunkterne afhænger af systemspecifikke parametre såsom længden af den elastiske slange og af de parametre, der indgår i bølgehastigheden, det være sig elasticiteten, tværsnitsarealet og tykkelsen af slangen, samt densiteten af væsken. Placeringen afhænger ikke af viskositeten af væsken og ej heller af tværsnitsarealerne af karrene, placeringen af pumpen og bredden af pumpeområdet, hvorimod placeringen af nulpunkterne viser sig at være afhængig af placeringen af pumpen. Da placeringen af resonanspunkterne kun afhænger af parametre for slangen er det sandsynligt, at der er tale om sammenfald mellem pumpens svingning og egensvingninger i slangen forårsaget af slangens elasticitet.

Resonansfrekvensernes placering er invariant overfor om ligningerne i modellene er lineariserede, mens placeringen af nulpunkterne ændres ved en linearisering. Der er ikke fundet tegn på, at løsningen af de lineariserede ligninger konvergerer mod løsningen af de ikke-lineære ligninger ved passende høj værdi af viskositeten, sådan som det er set beskrevet i litteraturen.

Ud fra de numeriske undersøgelser konkluderes det, at strømningen i kar-systemet er styret af en kombination af resonanssvingninger i slangen og af asymmetrien i systemet grundet pumpens placering, men det har ikke været muligt at give en fuldstændig forklaring på forekomsten og placeringen af resonans- og nulpunkterne.

Litteratur

- Abarbanel, S. & Zwas, G. [1969]. An iterative finite-difference method for hyperbolic systems, *Math. Comput.* **23**: 549–565.
- Acheson, D. J. [1990]. *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford.
- Baltzer, R. A. & Schaffranek, R. W. [2003]. Conservation-form equations of unsteady open-channel flow, *J. Hyd. Res.* **40**(5).
- Baum, J. D. & Levine, J. N. [1983]. A critical study of numerical methods for the solution of nonlinear hyperbolic equations for resonance systems, *J. Comp. Phys.* **58**: 1–28.
- Bellos, C. & Hrisanthou, V. [2003]. Numerical simulation of morphological changes in rivers and reservoirs, *Comput. Math. Appl.* **45**: 453–467.
- Borzi, A. & Propst, G. [2003]. Numerical investigation of the Liebau Phenomenon, *Z. angew. Math. Phys.* **54**: 1050–1072.
- Chattopadhyay, A. K. & Sil, S. [2003]. Dynamics of pulsed flow in an elastic tube, *Int. J. Mod. Phys. B* **17**: 4619–4629.
- Davis, S. F. [1987]. A simplified TVD finite-difference scheme via artificial viscosity, *Siam J. Sci. Stat. Comp.* **8**: 1–18.
- Elad, D., Katz, D., Kimmel, E. & Einav, S. [1991]. Numerical schemes for unsteady fluid-flow through collapsible tubes, *J. Biomed. Eng.* **13**: 10–18.
- Feynman, R. P. [1964]. *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, USA.
- Fletcher, C. A. J. [1988]. *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. I*, Springer-Verlag, USA.
- Fung, Y. C. [1990]. *Biomechanics – Motion, Flow, Stress and Growth*, Springer Verlag, New York Inc., USA.
- Gough, W., Richards, J. P. G. & Williams, R. P. [1983]. *Vibrations and Waves*, Ellis Horwood Ltd., England.
- Granger, R. A. [1985]. *Fluid Mechanics*, CBS College Publishing, USA.
- Jensen, H. E. [1988]. *Matematisk Analyse, bind 3*, 9. edn, Matematisk Institut, DTH.
- Jung, E. N. & Peskin, C. S. [2001]. Two-dimensional simulations of valveless pumping using the immersed boundary method, *Siam J. Sci. Comp.* **23**: 19–45.

- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. [1986]. *Theory of Elasticity*, 3. edn, Pergamon Press Ltd., UK.
- Liebau, G. [1954a]. Arterielle Pulsation und venöse Repulsation, *Z. gesam. exp. Med.* **123**(8): 71–90.
- Liebau, G. [1954b]. Über die ventillose Pumpprinzip, *Naturwissenschaften* **41**(14): 327–327.
- Logan, J. D. [1994]. *Nonlinear Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, INC., USA.
- MacCormack, R. W. [1969]. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, *AIAA Hypervelocity Impact Conference* (Paper no. 69-354): 1–7.
- Mahrenholtz, O. [1963a]. Ein Beitrag zum Förderprinzip periodisch arbeitender, ventilloser Pumpen. (teil 1), *Forsch. Ing.-Wes.* **29**(2): 47–56.
- Mahrenholtz, O. [1963b]. Ein Beitrag zum Förderprinzip periodisch arbeitender, ventilloser Pumpen. (teil 2), *Forsch. Ing.-Wes.* **29**(3): 73–81.
- Mahrenholtz, O. [1974]. Zur Pumpwirkung kollabierfähiger ventilloser Schläuche, *Ing. Arch.* **43**: 173–182.
- Milnor, W. R. [1982]. *Hemodynamics*, Williams and Wilkins, USA.
- Moretti, G. [1972a]. The choice of a time-dependent technique in gas dynamics, *AGARD-LS* (48): 11,1–11,28.
- Moretti, G. [1972b]. A critical analysis of numerical techniques: The piston-driven inviscid flow, *AGARD-LS* (48): 8,1–8,29.
- Moser, M., Huang, J., Schwarz, G., Kenner, T. & Noordergraaf, A. [1998]. Impedance defined flow – generalisation of William Harvey’s concept of the circulation – 370 years later, *Int. J. of Cardiovas. Med. and Sci.* **1**(3-4): 205–211.
- Normann, S. M. & Poulsen, J. M. [2004]. Ikke publicerede data.
- Olufsen, M. S. [1998]. *Modeling the arterial system with reference to an anesthesia simulator*, PhD thesis, IMFUFA Text 345, Roskilde University, Roskilde, Denmark.
- Ottesen, J. T. [2003]. Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: One-dimensional theory with experimental validation, *J. Math. Biol.* **46**(4): 309–332.
- Panton, R. L. [1996]. *Incompressible Flow*, John Wiley and Sons, INC., USA.
- Pearson, R. J. & Winterbone, D. E. [1997]. The simulation of gas dynamics in engine manifolds using non-linear symmetric difference schemes, *PI Mech. Eng. C - j. Mec.* **211**: 601–616.
- Pedley, T. J. [1980]. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press, GB.
- Peskin, C. S. [1976]. *Partial Differential Equations in Biology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

- Poloni, M., Winterbone, D. E. & Nichols, J. R. [1987]. Comparison of unsteady-flow calculations in a pipe by the method of characteristics and the 2-step differential Lax-Wendroff method, *Int. J. Mech. Sci.* **29**: 367–378.
- Rath, H. J. [1976]. Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip, Diss., Technischen Universität, Hannover.
- Rath, H. J. & Teipel, I. [1978]. Der Fördereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen, *Z. angew. Math. Phys.* **29**: 123–133.
- Richtmyer, R. D. & Morton, K. W. [1967]. *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2. edn, Interscience Publishers, USA.
- Rouse, H. [1978]. *Elementary Mechanics of Fluids*, Dover Publications, New York.
- Rubinow, S. I. & Keller, J. B. [1972]. Flow of a viscous-fluid through an elastic tube with applications to blood-flow, *J. Theor. Biol.* **35**: 299–313.
- Smith, N. P., Pullan, A. J. & Hunter, P. J. [2002]. An anatomically based model of transient coronary blood flow in the heart, *Siam J. Appl. Math.* **62**: 990–1018.
- Sod, G. A. [1978]. Survey of several finite-difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* **27**: 1–31.
- Takagi, S. & Takahashi, K. [1983a]. Study of a piston without valves. 1st report, on a pipe-capacity-system with a T-junction, *Bull. JSME*. **26**(218): 1366–1373.
- Takagi, S. & Takahashi, K. [1983b]. Study of a piston without valves. 2nd report, pumping effect and resonance in a pipe-capacity-system with a T-junction, *Bull. JSME*. **26**(218): 1366–1373.
- Thomann, H. [1978]. Simple pumping mechanism in a valveless tube, *Z. Angew. Math. Phys.* **29**: 169–177.
- Toro, E. F. [1997]. *Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Toro, E. F. & Siviglia, A. [2003]. Price: primitive centred schemes for hyperbolic systems, *Int. J. Num. Meth. Fl.* **42**: 1263–1291.
- Tritton, D. J. [1988]. *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand Reinhold, UK.
- von Bredow, H. [1968]. Untersuchung eines ventillosen Pumpprinzip, Diss., Technischen Universität, Hannover.
- Wade, W. R. [2000]. *An Introduction to Analysis*, 2. edn, Prentice-Hall, Inc., USA.
- Weisstein, E. W. [2004]. Froude Number.
URL: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/FroudeNumber.html>.
- Zagzoule, M., Khalidnaciri, J. & Mauss, J. [1991]. Unsteady wall shear-stress in a distensible tube, *J. Biomech* **24**: 435–439.

A Symbolliste

Dimensionen er for hvert symbol angivet med kantede parenteser ud fra SI-systemet, hvor $(m, s, kg) = (meter, sekund, kilogram)$. I rapporten benyttes de samme symboler for de dimensionsløse variable og konstanter.

$A(x, t)$	tværsnitsareal af slangen, $[A_{start}] = m^2$
A_{rest}	hviletværsnitsareal af slangen, $[A_{rest}] = m^2$
A_{start}	tværsnitsareal af slangen til tiden $t = 0$, $[A_{start}] = m^2$
A_{kar}	hviletværsnitsareal af karrene, $[A_{kar}] = m^2$
$A_S(x, t)$	tværsnitsarealet i punktet S
$A_T(x, t)$	tværsnitsarealet i punktet T
D_k	forhold mellem hvilediameter af karrene og af slangen
D_{rest}	hvilediameter af slangen, $[D_{rest}] = m$
E	Youngs modul af slangen, $[E] = kg/s^2 m$
L_0	indeks, der angiver tilstanden ved væskeoverfladen i venstre kar
L_1	indeks, der angiver tilstanden ved venstre rand
R_0	indeks, der angiver tilstanden ved væskeoverfladen i højre kar
R_1	indeks, der angiver tilstanden ved højre rand
Re	Reynolds tallet
Fr	Froude tallet
J	antal stedsskridt i algoritmen
$a(x, t)$	bølgehastigheden i slangen, $[a] = m/s$
$a_S(x, t)$	bølgehastigheden i punktet S
$a_T(x, t)$	bølgehastigheden i punktet T
a_0	bølgehastighed ved $p(x, t) = p_a$, $a_0 = \sqrt{\frac{4 E s}{3 \rho D_{rest}}}$, $[a_0] = m/s$
η	parameter for pumpens maksimaltryk
g	tyngdeaccelerationen, $[g] = m/s^2$
h_0	væskehøjden i karrene til tiden $t = 0$, $[h_0] = m$
h_L	væskehøjden i venstre kar, $[h_L] = m$
h_R	væskehøjden i højre kar, $[h_R] = m$
h_l	variabel, væskehøjden i venstre kar, $[h_l] = m$
h_r	variabel, væskehøjden i højre kar, $[h_r] = m$
j	tælleindeks, stedsskridt i algoritmen
l_0	længden af slangen, $[l_0] = m$
μ	viskositet, $[\mu] = kg/s m$
ν	pumpefrekvensen, $[\nu] = 1/s$
n	tælleindeks, tidsskridt i algoritmen
ξ	empirisk bestemt tabsfaktor

$p(x, t)$	trykket i slangen, $[p] = Pa \text{ (} kg/s^2 m^2 \text{)}$
$p_a(x, t)$	det ydre tryk, $[p_a] = Pa \text{ (} kg/s^2 m^2 \text{)}$
$p_t(x, t)$	det transmural tryk, $p_t = p_a - p$, $[p_t] = Pa \text{ (} kg/s^2 m^2 \text{)}$
p_0	atmosfærisk tryk, $[p_0] = Pa \text{ (} kg/s^2 m^2 \text{)}$
ρ	densitet, $[\rho] = kg/m^3$
r_{rest}	hvileradius af slangen, $[r_{rest}] = m$
r_0	karakteristisk længde, hvileradius i slangen
s	vægtykkelsen af slangen, $[s] = m$
t	tidsvariabel, $[t] = s$
Δt	lille tidsskridt
$u(x, t)$	strømningshastigheden af væsken i slangen, $[u] = m/s$
$u_S(x, t)$	strømningshastigheden i punktet S
$u_T(x, t)$	strømningshastigheden i punktet T
u_0	karakteristisk hastighed
\bar{u}_x	midling af den aksiale hastighed over tværsnitsarealet
x	stedsvariabel, $[x] = m$
Δx	lille stedsskridt
x_c	midtpunktet af pumpeområdet
x_A	pumpens venstre rand
x_B	pumpens højre rand
γ	parameter i modellen til beskrivelse af hastighedsprofil
Γ	parameter i modellen, $\Gamma = \frac{1}{\gamma+1}$
Ψ	forhold mellem $\overline{u_x^2}$ og \bar{u}_x^2 , $\Psi = 1 + \Gamma$

B Γ -modellen

Her angives ligningerne i modellen i tilfældet $\Gamma \neq 0$. Ændringerne ligger i koefficientmatricen i ligningssystemet, i bølgehastigheden og derved i karakteristikkerne og interpolatorerne ved randene. De ændrede ligninger vil ikke blive udledt idet de udledes på samme måde, som det er gjort i tilfældet $\Gamma = 0$, blot bliver udregninger lidt mere komplicerede. Når $\Gamma = 0$, reduceres nedenstående ligninger til ligningerne udledt i modelafsnittet, afsnit 3, og i afsnittet om de numeriske metoder, afsnit 4.5 og 4.6.2. På dimesionsløs form fås:

Væskestrømningen i den elstiske slange

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{\partial p_a}{\partial A} + \Gamma \frac{u^2}{A} & (1 + 2\Gamma)u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(A, u) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

hvor $b(A, u) = -\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{2(\gamma+2)\pi}{Re} \frac{u}{A}$.

Pumpen

$$p_a(x, t) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \eta \frac{(x-x_A)^2 (x_B-x)^2}{(\frac{1}{2}(x_B-x_A))^4} \sin(2\pi \nu t) \right) & \text{for } x \in [x_A, x_B] \\ p_0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Begyndelsesbetingelser

$$u(x, 0) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$A(x, 0) = A_{rest} \left(1 - \frac{u_0^2}{2a_0^2} \frac{h_0}{Fr} \right)^{-2} \quad (\text{B.4})$$

Randbetingelser

Randbetingelser for væskestrømningshastigheden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_L = \frac{1}{(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}) h_L} \left[\left(\frac{A_L}{A_{kar}} - (1 + \xi) \right) u_L^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_L}} \right) + \frac{2h_L}{Fr} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_R = \frac{-1}{(1 + \frac{A_{start}}{A_{kar}}) h_R} \left[\left(\frac{A_R}{A_{kar}} - (1 + \xi) \right) u_R^2 - 4 \frac{a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \sqrt{\frac{A_{rest}}{A_R}} \right) + \frac{2h_R}{Fr} \right] \quad (\text{B.6})$$

og for væskehøjden i karrene:

$$\frac{dh_L}{dt} = -\frac{A_{kar}}{A_L} u_L \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{dh_R}{dt} = \frac{A_{kar}}{A_R} u_R. \quad (\text{B.8})$$

Bølgehastigheden

$$c_{\pm} = u (1 + \Gamma) \pm \sqrt{u^2 [(1 + \Gamma)^2 - (1 + \Gamma)] + \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}}} \quad (\text{B.9})$$

ODE-systemet

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{-u \Gamma \pm \sqrt{u^2 \Gamma (1 + \Gamma) + \frac{a_0^2}{u_0^2} \sqrt{\frac{A_{rest}}{A}}}} \left(\frac{du}{dt} - b(A, u) \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Interpolation, venstre rand

$$u_S^n = \frac{u_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_1^n u_2^n - u_1^n a_2^n)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_1^n - u_2^n) \Gamma + (u_1^n - u_2^n) - (a_1^n - a_2^n))} \quad (\text{B.11})$$

$$a_S^n = \frac{a_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_1^n u_2^n - u_1^n a_2^n)}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_1^n - u_2^n) \Gamma + (u_1^n - u_2^n) - (a_1^n - a_2^n))} \quad (\text{B.12})$$

$$A_S^n = A_1^n + c_-(A_S, u_S) (A_1^n - A_2^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (\text{B.13})$$

hvor $c_-(A_S, u_S)$ er egenværdien c_- med værdierne $A = A_S$ og $u = u_S$.

Interpolation, højre rand

$$u_T^n = \frac{u_{J+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{J+1}^n u_J^n - u_{J+1}^n a_J^n)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_{J+1}^n - u_J^n) \Gamma + (u_{J+1}^n - u_J^n) + (a_{J+1}^n - a_J^n))} \quad (\text{B.14})$$

$$a_T^n = \frac{a_{J+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{J+1}^n u_J^n - u_{J+1}^n a_J^n)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u_{J+1}^n - u_J^n) \Gamma + (u_{J+1}^n - u_J^n) + (a_{J+1}^n - a_J^n))} \quad (\text{B.15})$$

$$A_T^n = A_{J+1}^n - c_+(A_T, u_T) (A_{J+1}^n - A_J^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (\text{B.16})$$

hvor $c_+(A_T, u_T)$ er egenværdien c_+ med værdierne $A = A_T$ og $u = u_T$.

C MatLab-programmet

Her følger M-filen, jeg har brugt til at løse ligningerne i den dimensionsløse ikke-lineære model med de ikke-stationære Bernoulli-randbetingelser på konservativ form; ligningerne er her løst med MacCormack-algoritmen. M-filerne til løsningen af varianterne af ligningerne, der er omtalt undervejs i rapporten, er opbygget efter samme skabelon og derfor ikke taget med. På internetsiden <http://mmf.ruc.dk/~stinet/koder.m> er det muligt at kopiere koderne. Programmet kan køres direkte i MatLab, dog anbefales det, at frekvensvektoren ('frekvens') og tidsdomænet ('T') ændres inden en kørsel, idet frekvensvektoren her er sat til at gennemkøre intervallet $1 - 15 \text{ Hz}$ med interval på 1 Hz hver i 800 tidskridt, hvilket vil tage nogle timer.

```
clear;
%----- specifikation af gitter -----

J=200;

l=1.8;          % længden af slangen [m]
r1=0.015;       % karakteristisk længde, hvileradius af slangen [m]
u0=0.2;         % karakteristisk hastighed [m/s]

h=l/r1/J;       % delta x
k=0.001;        % delta t

%----- kørselstid -----

T=800;          % kørselstiden, dimensionsløst (svarer til 60 sekunder)
N=T/k; N=round(N);
M=800;          % kun hver M'te værdi gemmes og plottes
N=round(N/M)*M;
T=k*N;

x=[0:h:l/r1]';
t=[0:k:T]';

pstop=400;      % pumpestop, her stoppes pumpen efter 30 sekunder
visk=0;         % viskositetsmarkør, visk=1 betyder at væsken er viskøs

%----- slangens geometri -----

D1=2*r1;        % diameter af slangen [m]
Arest=pi*(r1)^2; % hviletværsnitsareal af slangen [m^2]
s=0.004;        % tykkelsen af slangevæggen [m]
E=4.033e6;      % Youngs modul [N/m^2]

%----- karrenes geometri -----

Dk=5.7;
```

```

Dkar=Dk*D1;          % diameter af karret [m]
Akar=pi*(Dkar/2)^2;   % tværsnitsareal af kar [m^2]
hkar=1;               % væskens højde i karrene [m]

%----- væskes egenskaber -----

rho=998;              % densiteten af væsken [Kg/m^3]
mu=0.001;             % viskositet af væsken ved 20 grader celcius [Ns/m^2]

%----- andre parametre -----

g=9.81;               % tyngdeaccelerationen [m/s^2]
p0=1.013e5 ;          % ydre tryk, lufttryk [Pa]
xi=0.5;               % tabskonstant ved ind- og udstrømning

flowprofile=2;        % specifikation af strømningsprofilen

%----- dimensionsløse størrelser -----

a0=sqrt(4/3*s*E/(rho*D1));
a0kvad=4/3*s*E/(rho*D1); % kvadratet på a0 [m/s]

Re=u0*r1*rho/mu;       % Reynolds tal
Fr=u0^2/(g*r1);        % Froude tal

hkar=hkar/r1;
Arest=Arest/(r1^2);
Akar=Akar/(r1^2);
p0=p0/(rho*u0^2);

%----- pumpen -----

centrum=0.3*l/r1;      % centrum for pumpen
halv=0.1*l/r1;         % halvbredden af pumpeområdet
cp=round(centrum*r1/l*(J))+1; % centrum omregnet til J-værdi: startp*J
rp=round(halv*r1/l*(J)); % radius omregnet til J-værdi: endp*J

% stedsdelen i den stedsafledte af pumpefunktionen:

pumpeSted(1:J+1)=2*((centrum-halv)-x(1:J+1)).*(x(1:J+1)-(centrum+halv)).
                                     *(2*centrum-2*x(1:J+1))./((-halv)^4;;

pumpeSted(1:(cp-rp-1))=0;
pumpeSted((cp+rp+1):J+1)=0;

Pmax=1.68;              % det maksimale ydre tryk fra pumpen

pumpe(1:J+1)=Pmax*p0*pumpeSted(1:J+1); % den afledte af pumpefunktionen uden tidsdel

%----- frekvens -----

q=1;                    % tæller for frekvensløkken
frekvens=1:1:15;        % frekvensvektor
HR=frekvens*r1/u0;       % dimensionsløs frekvensvektor

Hnumber=length(HR);

Fh=zeros([Hnumber,round(N/M)]); % matrix til deltah-værdier

for H=HR,                % frekvensløkke

%----- definition af matricer -----

```

```

a=zeros([2,J+1]);      % matrix for A og u, A=a(1,:) og u=a(2,:)
agamle=zeros([2,J+1]); % matrix for gamle værdier af A og u
b=zeros([2,J+1]);      % matrix, der svarer til f i ligningssystemet på konservativ form
ga=zeros([2,J+1]);     % matrix, der svarer til g i ligningssystemet på konservativ form
ad=zeros([2,J+1]);     % matrix til første trin
bd=zeros([2,J+1]);     % matrix til første trin
gd=zeros([2,J+1]);     % matrix til første trin

p=zeros([1,J+1]);      % vektor til trykket

f=zeros([1,J+1]);      % vektor for bølgehastigheden, angivet som a i teksten

td=zeros(1,round(N/M));

%----- begyndelsesbetingelser -----

% begyndelsesbetingelser, der er forskellig fra nul:

hL=hkar;               % højden i venstre kar
hR=hkar;               % højden i højre kar
Astart=Arest/(1-u0.^2./(a0kvad).*hkar/(2*Fr)).^2;
rstart=sqrt(Astart/pi);
a(1,[1:J+1])=Astart;
agamle(1,[1:J+1])=Astart;

% begyndelsesværdier:
nd=1;
td(1)=t(1);
Fh(q,nd)=hR-hL;
FhLd(q,nd)=hL;
FhRd(q,nd)=hR;

%----- tidsskridt -----

tic                    % tidstæller

for n=1:round(N/M),
    for m=1:M,

% specifikation af tidsdelen i de forskellige pumper:

        tid1=sin(2*pi*H*t((n-1)*M+m+1))*(sin(2*pi*H*t((n-1)*M+m+1))>0);

        tid2=sin(2*pi*H*t((n-1)*M+m+1));

% bestemmelse af fourierrækken

        NN=1;
        fourier=zeros([1]);
        for ii=1:NN,
            fourier(ii)=cos(4*ii*pi*H*t((n-1)*M+m+1))/((2*ii-1)*(2*ii+1));
        end
        fouriersum=(sum(fourier));

        tid3=1/pi+0.5*sin(2*pi*H*t((n-1)*M+m+1))-2/pi*fouriersum;

% fastsættelse af tidsdelen i pumpefunktionen:

        tidsdel=tid2;

```

```

% den stedsafledte af pumpefunktionen med pumpestop:

deltaxpa=pumpe(1:J+1).*tidsdel.*(t((n-1)*M+m+1)<pstop);

% bestemmelse af variable til randbetingelserne:

p(1:J+1)=2*a0kvad./(u0.^2).*(1-sqrt(Arest./a(1,[1:J+1]))) + p0; % indre tryk
f(1:J+1)=a0/u0*sqrt(sqrt(Arest./a(1,[1:J+1]))); % bølgehastigheden

% lineær interpolation ved venstre rand:

ufs1=k/h*(f(1)*a(2,2)-a(2,1)*f(2));
ufs2=1-k/h*((a(2,1)-a(2,2))-(f(1)-f(2)));

uS=(a(2,1)+ufs1)/ufs2; % hastighed
fS=(f(1)+ufs1)/ufs2; % bølgehastighed
aS=a(1,1)+(a(1,1)-a(1,2))*(uS-fS)*k/h; % tværsnitsareal

% lineær interpolation ved højre rand:
ufr1=k/h*(f(J+1)*a(2,J)-a(2,J+1)*f(J));
ufr2=1+k/h*((a(2,J+1)-a(2,J))+(f(J+1)-f(J)));

uR=(a(2,J+1)+ufr1)/ufr2; % hastighed
fR=(f(J+1)+ufr1)/ufr2; % bølgehastighed
aR=a(1,J+1)-(a(1,J+1)-a(1,J))*(uR+fR)*k/h; % tværsnitsareal

% første trin:
ad([1:2],[1:J])=a([1:2],[1:J])-k/h*(b([1:2],[2:J+1])-b([1:2],[1:J]))+k*ga([1:2],[1:J]);
bd(1,[1:J])=ad(1,[1:J]).*ad(2,[1:J]);
bd(2,[1:J])=0.5*ad(2,[1:J]).^2+2*a0kvad./(u0.^2).*(1-sqrt(Arest./ad(1,1:J)));
gd(2,[1:J])=-deltaxpa(1:J)-2*(flowprofile+2)*pi/Re*ad(2,[1:J])./ad(1,[1:J])*(visk);

% korrektionstrin
a([1:2],[2:J])=0.5*(a([1:2],[2:J])+ad([1:2],[2:J]))-0.5*k/h*(bd([1:2],[2:J])-bd([1:2],[1:J-1]))
+0.5*k*gd([1:2],[2:J]);

% venstre randbetingelse:
a(2,1)=a(2,1)-k/((1+Astart/Akar)*hL)*(((1+xi)-(a(1,1)/Akar).^2)*a(2,1).^2+2*(p(1)-p0)-2/Fr*hL);
a(1,1)=aS+(aS/fS)*(a(2,1)-uS+2*(flowprofile+2)*pi/Re*uS./aS*(visk)*k);

% højre randbetingelse:
a(2,J+1)=a(2,J+1)+k/((1+Astart/Akar)*hR)*(((1+xi)-(a(1,J+1)/Akar).^2)*a(2,J+1).^2+2*(p(J+1)-p0)
-2/Fr*hR);
a(1,J+1)=aR-(aR/fR)*(a(2,J+1)-uR+2*(flowprofile+2)*pi/Re*uR./aR*(visk)*k);

% korrektionstrin:
b(1,[1:J+1])=a(1,[1:J+1]).*a(2,[1:J+1]);
b(2,[1:J+1])=0.5*a(2,[1:J+1]).^2+2*a0kvad./(u0.^2).*(1-sqrt(Arest./a(1,1:J+1)));
ga(2,[1:J+1])=-deltaxpa(1:J+1)-2*(flowprofile+2)*pi/Re*a(2,[1:J+1])./a(1,[1:J+1])*(visk);

% højden i karrene:
hL=(hL-agamle(1,1)/Akar*agamle(2,1).*k);
hR=(hR+agamle(1,J+1)/Akar*agamle(2,J+1).*k);
deltah=hR-hL;

% opdatering af matricen med de gamle værdier
agamle([1:2],[1:J+1])=a([1:2],[1:J+1]);

% advarsler:
if -1*max(-a(1,[1:J+1])/pi)<0, warning('radius er negativt'), end
if max(f(1:J+1)+a(2,1:J+1))>h/k, warning('CLF betingelse overskredet'), end

```

```

end      % m-løkken slutter

    nd=nd+1;

    Fh(q,nd)=deltah;
    FhLd(q,nd)=hL;
    FhRd(q,nd)=hR;
    td(nd)=t(n*M+1);

end                      % n-løkken slutter
    q=q+1;                % tæller for H-løkke
end                      % H-løkken slutter

toc                      % tidstæller slutter

%----- grafer -----

% plotter deltah-værdier som funktion af tiden:

figure, plot(td*r1/u0,Fh*r1),
xlabel('tid [s]','fontsize',14), ylabel('højdeforskel [m]','fontsize',14), grid on

```